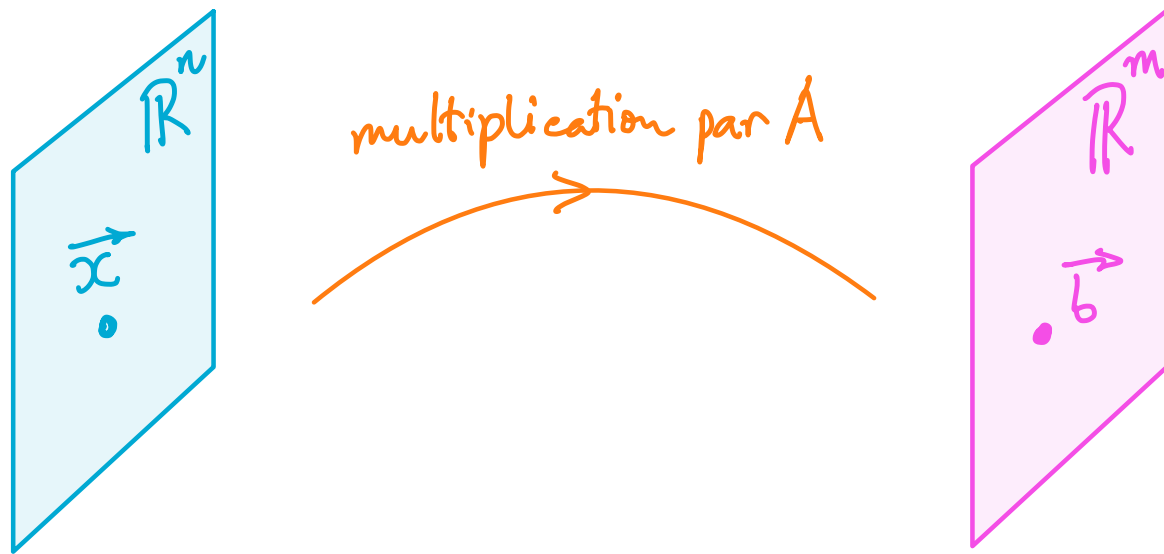


Introduction aux applications linéaires.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être vue sous forme dynamique:



La matrice A "transforme" le vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$ revient à trouver $\vec{x}$ qui est transformé en $\vec{b}$.

Définition.

Une transformation T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est une application qui à chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lui fait correspondre un unique $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

On note $T(\vec{x}) = \vec{b}$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est appelé le domaine de T ou espace de départ.

L'ensemble $\mathbb{R}^m$ est appelé le codomaine de T ou espace d'arrivée.

L'ensemble

$$\{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\vec{x}) = \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^m$$

est appelé image de T , noté $\text{Im}(T)$.

Exemple important.

Soit $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$.

On peut définir la transformation $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ suivante:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

appelée transformation matricielle associée à la matrice A .

Propriétés.

Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$1. A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} \Rightarrow T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

$$2. A(\lambda \vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) \Rightarrow T(\lambda \vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$$

Définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation. On dit que T est une application linéaire (ou transformation linéaire) si

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

autrement dit, si

1. l'image de la somme de deux vecteurs
est la somme des images des deux vecteurs
2. l'image du multiple d'un vecteur
est le multiple de l'image du vecteur

Exemples.

1. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ n'est pas linéaire car $T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
et $T(x) + T(y) = x^2 + y^2 \neq T(x+y)$
2. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas linéaire car $T(x+y) = \sqrt{x+y}$
et $T(x) + T(y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq T(x+y)$
3. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 9x$ est linéaire car $T(x+y) = 9(x+y) = 9x + 9y = T(x) + T(y)$
 $T(\lambda x) = 9(\lambda x) = \lambda(9x) = \lambda T(x)$
4. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 9x + 7$ n'est pas linéaire car $T(x+y) = 9(x+y) + 7$
et $T(x) + T(y) = 9x + 7 + 9y + 7$
 $= 9x + 9y + 14$
 $\neq T(x+y)$

5. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}$ est linéaire:

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) - 5(u_2 + v_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3u_1 + 2u_2) + (3v_1 + 2v_2) \\ (u_1 - 5u_2) + (v_1 - 5v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 \\ u_1 - 5u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3v_1 + 2v_2 \\ v_1 - 5v_2 \end{bmatrix}$$

$$= T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T(\lambda \vec{u}) = T\left(\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(\lambda u_1) + 2(\lambda u_2) \\ \lambda u_1 - 5(\lambda u_2) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 \\ u_1 - 5u_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda T(\vec{u})$$

Proposition.

Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire alors $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Preuve.

Nous avons : $T(\vec{0}) = T(0 \vec{u}) \stackrel{2.}{=} 0 T(\vec{u}) = \vec{0}$ ■

Remarque.

La contra-réciproque de cette affirmation s'écrit:

"Si $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$ alors $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas une application linéaire"

et donne un critère simple pour décider si une transformation n'est pas une application linéaire:

Comme $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = 9x + 7$ est telle que $T(0) = 7 \neq 0$, on conclut tout de suite que T n'est pas linéaire.

Attention: Si $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T n'est pas forcément linéaire.

Conséquences de la définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors :

a. $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$

b. Principe de superposition :

$$T(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k) = c_1T(\vec{u}_1) + c_2T(\vec{u}_2) + \dots + c_kT(\vec{u}_k)$$

pour tout $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ et $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Preuve.

a. $T(c\vec{u} + d\vec{v}) \stackrel{1.}{=} T(c\vec{u}) + T(d\vec{v}) \stackrel{2.}{=} cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

b. Il suffit d'écrire $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = c_1\vec{u}_1 + (c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k)$

et utiliser la partie a (plusieurs fois). ■

Matrice d'une application linéaire.

Nous avons vu que pour toute matrice A de taille $m \times n$, la transformation matricielle $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ est une application linéaire.

Nous allons voir maintenant que pour toute application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ il existe une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$T(x, y) = (4x + 5y, 2x - y, 3x + 7y)$$

On a:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x + 5y \\ 2x - y \\ 3x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5y \\ -y \\ 7y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d'où $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ avec $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

On remarque que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 2-0 \\ 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+5 \\ 0-1 \\ 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

sont les colonnes de la matrice A .

Soient $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Soit $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.

Par construction, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$

autrement dit, $\vec{x} = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n] \vec{x}$

Définition.

La matrice $I_n = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

est appelée la **matrice identité** (ou **unité**) de taille $n \times n$.

Nous avons: $\vec{x} = I_n \vec{x}$

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Soit $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.

Le principe de superposition implique:

$$T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n)$$

Ainsi, l'image de $\vec{x}$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$: il suffit de calculer $T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)$ pour connaître $T(\vec{x})$ pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

$$\begin{aligned} \text{Comme } T(\vec{x}) &= x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n) \\ &= [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)] \vec{x} \end{aligned}$$

nous avons donc $T(\vec{x}) = A \vec{x}$ où $A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$

Définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. La matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont les images des n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

$$A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$$

est appelée *matrice canoniquement associée à T* .

Théorème.

La matrice A canoniquement associée à T est l'unique matrice de taille $m \times n$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Conséquence.

L'application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donc la transformation matricielle associée à la matrice $A = [T(\vec{e}_1) \dots T(\vec{e}_n)]$.

Nous avons l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{application linéaire} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{transformation matricielle} \end{array} \right.$$

Exemples.

Construire les matrices canoniquement associées aux applications linéaires suivantes:

1. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (4x - 2y + 3z, 5x + 6y, 9x - z)$

$$\left. \begin{array}{l} T(1, 0, 0) = (4 - 0 + 0, 5 + 0, 9 - 0) = (4, 5, 9) \\ T(0, 1, 0) = (0 - 2 + 0, 0 + 6, 0 - 0) = (-2, 6, 0) \\ T(0, 0, 1) = (0 - 0 + 3, 0 + 0, 0 - 1) = (3, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrice 3×3

2. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (4x - 2y + 3z, 5x + 6y)$

$$\left. \begin{array}{l} T(1, 0, 0) = (4 - 0 + 0, 5 + 0) = (4, 5) \\ T(0, 1, 0) = (0 - 2 + 0, 0 + 6) = (-2, 6) \\ T(0, 0, 1) = (0 - 0 + 3, 0 + 0) = (3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

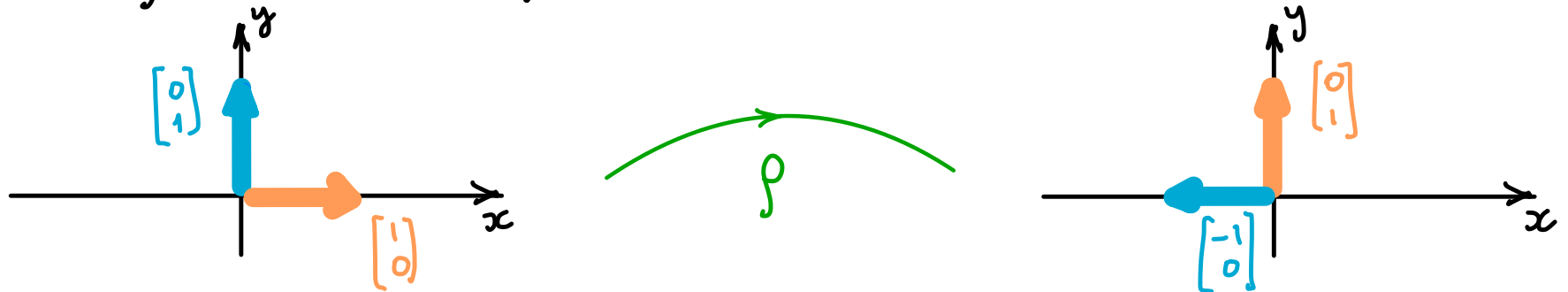
matrice 2×3

3. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x,y) = (4x - 2y, 5x + 6y, 9x)$

$$\left. \begin{array}{l} T(1,0) = (4-0, 5+0, 9) = (4, 5, 9) \\ T(0,1) = (0-2, 0+6, 0) = (-2, 6, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice 3×2

4. Rotation $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine (dans le sens positif ↺)

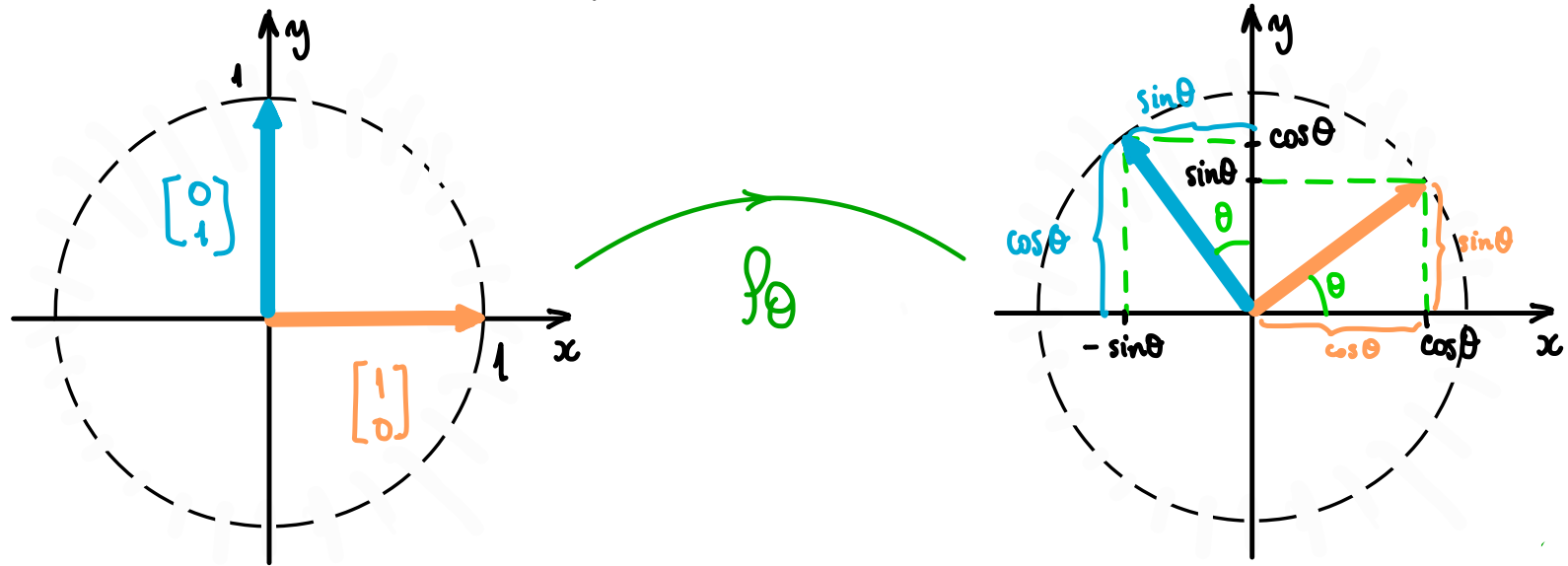


$$\left. \begin{array}{l} \rho(1,0) = (0,1) \\ \rho(0,1) = (-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow A_\rho = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où: } \rho(\vec{x}) = A_\rho \vec{x} \Leftrightarrow \rho\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \rho(x,y) = (-y, x) \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

5. Rotation $f_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle θ autour de l'origine (dans le sens positif ↺)

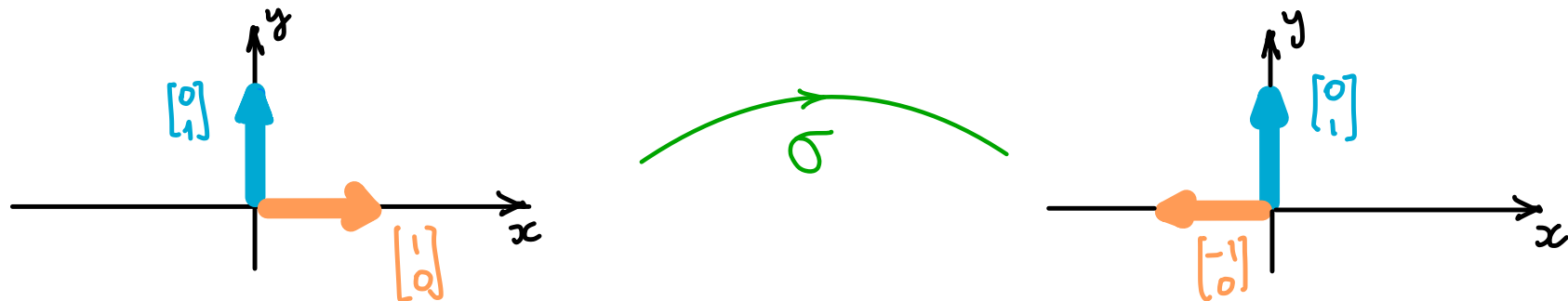


$$\left. \begin{aligned} f_\theta(1, 0) &= (\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ f_\theta(0, 1) &= (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{f_\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où: } f_\theta(\vec{x}) = A_{f_\theta} \vec{x} \Leftrightarrow f_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f_\theta(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

6. Symétrie $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'axe $O\vec{y}$ ("miroir vertical")



$$\left. \begin{array}{l} (1, 0) = (-1, 0) \\ (0, 1) = (0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow A_\sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } \sigma(\vec{x}) = A_\sigma \vec{x} \Leftrightarrow \sigma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(x, y) = (-x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$