

Théorème .

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(c-à-d. que pour A donnée, elles sont toutes vraies ou toutes fausses)

1. L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. Tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A .
3. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$: $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$
4. La matrice échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par ligne.

Preuve.

Les affirmations 1, 2 et 3 sont équivalentes à cause de la définition du produit $A\vec{x}$.

Soit R la forme échelonnée-réduite associée à la matrice A .

Nous avons donc $[A | \vec{b}] \sim [R | \vec{d}]$

Si 4) est vraie, alors la dernière ligne de R est non nulle et l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et 1) est vraie.

Si 4) est fausse, alors la dernière ligne de R est nulle et lorsque la dernière composante de $\vec{d}$ est non nulle, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ n'a pas de solution. Par conséquent, 1) est fausse aussi. ■

Systèmes d'équations linéaires homogènes.

Définition.

Un système d'équations linéaires est appelé **homogène** s'il peut s'écrire sous la forme $A\vec{x} = \vec{0}$ où A est une matrice de taille $m \times n$ et $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$.

Conséquence.

Un système homogène est **toujours** consistant car $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ est une solution du système, appelée **solution triviale**.

Un vecteur non-nul $\vec{x} \neq \vec{0}$ solution du système sera appelée **solution non-triviale**.

Question. Sous quelle condition un système homogène possède des solutions non-triviales ?

Conséquence (du théorème d'existence et unicité des solutions)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède des solutions non-triviales
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions
3. il y a des variables libres
4. il y a des colonnes de A qui ne sont pas associées à des pivots.

Formulation alternative:

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ ne possède pas des solutions non-triviales
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution unique ($\vec{x} = \vec{0}$)
3. il n'y a pas de variables libres
4. la forme échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par colonne.

Exemple.

Considérons le système homogène
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée nous donnent :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

variable libre
↓

Par conséquent, le système possède des solutions non-triviales :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble solution est donc $\text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ou $\text{Vect} \{(-5, -2, 1)\}$.

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Supposons que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour un certain $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Soit $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ (c'est-à-dire tel que $A\vec{p} = \vec{b}$).

La solution générale de $A\vec{x} = \vec{b}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}$ où $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Preuve. À voir : 1) $\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$

2) Toute solution s'écrit sous la forme $\vec{p} + \vec{v}$

1) Par hypothèse $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $A\vec{p} = \vec{b}$

et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $A\vec{v} = \vec{0}$

$$\text{On a } A\vec{w} = A(\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{p} + A\vec{v} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

2) Soit $\vec{u}$ une autre solution de $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\left. \begin{array}{l} A\vec{u} = \vec{b} \\ A\vec{p} = \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow A\vec{u} - A\vec{p} = \vec{b} - \vec{b} \Rightarrow A(\vec{u} - \vec{p}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u} - \vec{p}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{p} + \vec{v}$$



Remarque.

Le théorème nous dit que pour obtenir *toutes* les solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$

il suffit de connaître :

- une solution $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ de $A\vec{x} = \vec{b}$
- *toutes* les solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$

Indépendance linéaire.

Définition.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est *linéairement indépendant* (ou *libre*) si l'*unique solution* de l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

est la solution triviale $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^k$.

- On dit que l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est *linéairement dépendant* (ou *lié*) si l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

possède une *infinité de solutions*.

En particulier, s'il existe des poids $c_1, \dots, c_k$ non tous nuls tels que :

$$\boxed{c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}} \quad (*)$$

On appelle *(*)* une *relation de dépendance linéaire*.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants car la matrice augmentée associée à l'équation vectorielle $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ est :

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ | \ \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \text{ (solution unique)}$$

2. Les vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendants car la matrice augmentée associée à l'équation vectorielle $x_1 \vec{w}_1 + x_2 \vec{w}_2 + x_3 \vec{w}_3 = \vec{0}$ est :

$$[\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \vec{w}_3 \ | \ \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ d'où } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Une relation de dépendance linéaire est ici $2\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{0}$.

Remarque.

Soient $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^m$

et soit $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ la matrice de taille $m \times n$ de colonnes $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Nous avons les équivalences suivantes:

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ ensemble libre $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution unique.

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ ensemble lié $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions.

Exemple.

Les colonnes de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendantes car la solution de $A\vec{x} = \vec{0}$ est

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Cas particuliers.

- L'ensemble $\{\vec{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- L'ensemble $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Théorème. (Caractérisation des ensembles linéairement dépendants)

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ (avec $k \geq 2$) est linéairement dépendant si et seulement si, au moins un des vecteurs de S peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Preuve.

$\Leftarrow$) Si $\vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, alors:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + (-1) \vec{v}_j + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

(relation de dépendance linéaire car $-1 \neq 0$).

$\Rightarrow$) Supposons que $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est lié.

A voir : un des $\vec{v}_j$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

- si $\vec{v}_1 = \vec{0}$ alors nous pouvons écrire $\vec{v}_1 = 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_k$.
- si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ alors par hypothèse, il y a une relation de dépendance linéaire $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$, avec $c_1, \dots, c_k$ non tous nuls.

Soit j le plus grand indice tel que $c_j \neq 0$.

Comme $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, nous avons $j > 1$ car sinon, $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}$, avec $c_1 \neq 0$ impossible!

Ainsi, $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_j\vec{v}_j = \vec{0} \Rightarrow c_j\vec{v}_j = -c_1\vec{v}_1 - c_2\vec{v}_2 - \dots - c_{j-1}\vec{v}_{j-1}$

et $\vec{v}_j$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{v}_k$:

$$\vec{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{v}_1 - \frac{c_2}{c_j}\vec{v}_2 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{v}_{j-1} + 0\vec{v}_{j+1} + \dots + 0\vec{v}_k \quad \blacksquare$$

Théorème.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $k > n$, alors les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont **forcément liés**.

Preuve.

La matrice $A = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k]$ est une matrice de taille $n \times k$.

Si $k > n$, alors la matrice augmentée associée à $A\vec{x} = \vec{0}$ possède forcément des variables libres, ce qui implique la dépendance linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. ■

Théorème.

Si un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ contient le vecteur nul, alors il est forcément lié.

Preuve.

Supposons que $\vec{v}_1 = \vec{0}$ (sinon on rénumérote les vecteurs).

Nous avons la relation de dépendance linéaire :

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_k = \vec{0}$$

