

## L'espace $\mathbb{R}^n$

**Définition.** Une matrice de taille  $m \times 1$  (c'est-à-dire formée d'une seule colonne) est appelée *vecteur colonne* ou *vecteur*.

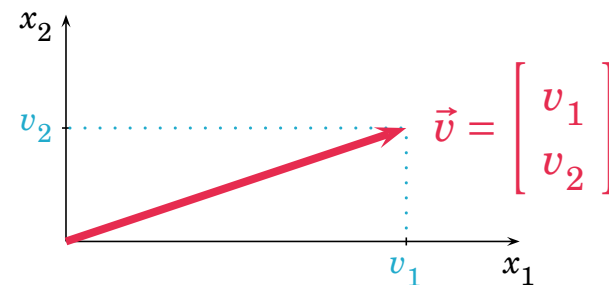
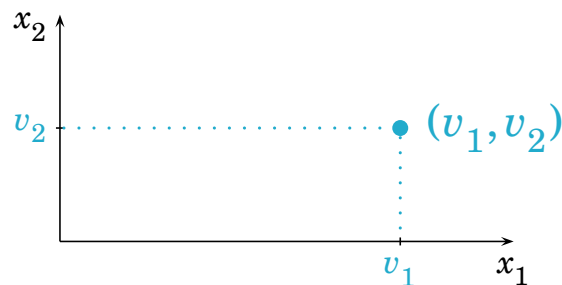
Les coefficients d'un vecteur (colonne) sont appelés *composantes*.

L'ensemble des vecteurs à deux composantes est noté  $\mathbb{R}^2$ .

Les éléments de  $\mathbb{R}^2$  sont de la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

**Remarque.** Nous allons identifier les points du plan avec les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  :



Le vecteur de composantes  $v_1$  et  $v_2$  sera noté parfois  $(v_1, v_2)$  au lieu de  $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ .

**Attention :** Ne pas confondre  $(v_1, v_2)$  avec  $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$  (matrice de taille  $1 \times 2$ ).

## Opérations dans $\mathbb{R}^2$

*Addition :*

Si  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

*Multiplication par un scalaire<sup>1</sup> :*

Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

**Remarque.** L'ensemble des vecteurs de la forme  $\lambda \vec{v}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est la droite du plan qui passe par l'origine de vecteur directeur  $\vec{v}$ .

---

1. Pour les physiciens, un scalaire est une quantité physique qui ne comporte qu'une grandeur. Pour les mathématiciens, un scalaire est un nombre.

De manière générale, nous pouvons définir  $\mathbb{R}^n$ , avec  $n \geq 3$ , comme l'ensemble des vecteurs (colonne) de la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R},$$

muni des opérations d'addition de vecteurs et multiplication par un scalaire :

- *addition* : si  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- *multiplication par un scalaire* : si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

## Propriétés algébriques de $\mathbb{R}^n$

(A1) L'addition est commutative :

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}, \quad \text{pour tout } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

(A2) L'addition est associative :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad \text{pour tout } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

(A3) Le vecteur  $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  est l'élément neutre pour l'addition :

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \quad \text{pour tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

(A4) Le vecteur  $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$  est l'opposé de  $\vec{v}$  :

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

(A5) Si  $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  alors

$$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}.$$

(A6) Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors

$$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}.$$

(A7) Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  alors

$$(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v}).$$

(A8) Si  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  alors

$$1\vec{v} = \vec{v}.$$

**Remarque.** Nous verrons plus tard qu'il y a d'autres ensembles qui satisfont ces propriétés. Ce sont les *espaces vectoriels*.

## Combinaisons linéaires

**Définition.** Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs donnés.

Le vecteur

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R},$$

est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  de poids respectifs  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ .

### Exemple

Comme

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix},$$

le vecteur  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}$  est combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  et  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$  de poids respectifs  $\alpha_1 = 3$  et  $\alpha_2 = 2$ .

**Question:** Considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Est-ce que le vecteur  $\vec{v}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  ?

Autrement dit, est-ce qu'il existe des nombres  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$  ?

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 11 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 = 19 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 19 \\ -2 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1}]{\quad} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -9 & -36 \\ 0 & 7 & 28 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow -\frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{7}L_3}]{\quad} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1}]{\quad} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ainsi,  $\vec{v}$  est combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  avec poids respectifs  $\alpha_1 = 3$  et  $\alpha_2 = 4$ .

**Remarque.** La matrice augmentée est ici  $\left[ \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \mid \vec{v} \right]$ .

## Equations vectorielles

Considérons maintenant l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k = \vec{b},$$

où  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$  sont donnés et  $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$  sont à déterminer.

Cette équation vectorielle possède la même solution générale que le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée  $\left[ \begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array} \right]$ .

En particulier, nous avons l'équivalence suivante :

|                                                                                              |        |                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| le vecteur $\vec{b}$ est combinaison<br>linéaire de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ | $\iff$ | le système d'équations linéaires associé à la matrice<br>augmentée $\left[ \begin{array}{cccc c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array} \right]$ est consistant |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Définition.** Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$  des vecteurs donnés.

Le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$  est appelé *partie (de  $\mathbb{R}^n$ ) engendrée par les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$* , noté  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ .

Nous avons donc

$$\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \{ \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^n.$$

En anglais, on note  $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ .

### Remarques.

- Par construction, pour chaque  $j \in \{1, \dots, k\}$ , les vecteurs de la forme  $\lambda \vec{v}_j$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , se trouvent dans  $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ .

En particulier, en prenant  $\lambda = 0$ , nous trouvons que

$$\vec{0} \in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\},$$

quelque soit le choix des vecteurs  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ .

- Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\} &\iff \text{le vecteur } \vec{b} \text{ est combinaison linéaire de } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \\ &\iff \text{l'équation vectorielle } x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k = \vec{b} \\ &\quad \text{possède (au moins) une solution} \\ &\iff \text{le système d'équations linéaires associé à la matrice} \\ &\quad \text{augmentée } \left[ \begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array} \right] \text{ est consistant} \end{aligned}$$