Remarque. Si pendant l'échelonnement une des lignes a la forme :

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid b \qquad \text{avec } b \neq 0,$$

nous arrêtons l'échelonnement et concluons que le système ne possède pas de solution car l'équation associée à cette ligne est

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b \neq 0.$$

Dans le cas contraire, nous avons un certain nombre de lignes nulles :

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid 0$$

situées en bas de la matrice et le système est consistant.

Soit $r > 0$ *le nombre de lignes non-nulles* d'une matrice échelonnée associée à un système à m équations et n inconnues.

Par construction nous avons $r \leqslant m$.

Nous distinguons deux cas :

- $r = n$: Nous avons un système de r équations à r inconnues et la solution est unique.
- $r < n$: Nous avons plus d'inconnues que d'équations et de ce fait, une infinité de solutions.

Matrices échelonnées-réduites

Si une matrice échelonnée possède r lignes non-nulles, avec $r < n$, alors le système associé a une infinité de solutions. Pour expliciter ces solutions, il peut s'avérer utile d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée de manière à obtenir une matrice échelonnée–réduite équivalente.

Définition. Une matrice est dite *échelonnée–réduite* si elle est échelonnée, telle que tous les coefficients principaux sont des pivots (c'est-à-dire égaux à 1) et si dans toute colonne qui contient un pivot, tous les autres éléments sont nuls.

Exemples

Les matrices suivantes sont échelonnées–réduites :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées–réduites :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode de réduction de Gauss–Jordan

1) Echelonner la matrice augmentée associée au système.

2) Si $r < n$, réduire la matrice échelonnée.

3) Considérer le système associé à la matrice augmentée ainsi obtenue et le résoudre.

Remarque.

Lorsque la solution d'un système d'équations linéaires est unique, l'élimination de Gauss suivie de la « substitution à rebours » est plus rapide que la réduction de Gauss-Jordan. Toutefois, pour des systèmes « petits » (jusqu'à 4-5 équations/inconnues), le temps de calcul « à la main » est comparable.

Définition.

- Les variables associées aux *pivots* s'appelent *variables principales* ou *variables liées*.
- Les variables associées aux colonnes *sans pivot* s'appelent *variables secondaires* ou *variables libres*.

Exemples

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \to L_2 - L_1}{\widetilde{\quad}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\widetilde{\quad}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\widetilde{\quad}} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

Système associé :

$$\begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Si $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\begin{cases} x = -5t, \\ y = -2t, \\ z = t, \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \qquad \text{(infinité de solutions)}$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Géométriquement, il s'agit de la droite qui passe par l'origine de vecteur directeur $\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Les variables x et y sont principales (ou liées).

La variable z est secondaire (ou libre).

2. $$\begin{cases} x - 5y + 3z + 6u = 14 \\ \quad - 2y \qquad\quad + 7u = 12 \\ 2x - 5y + 6z - 5u = -1 \end{cases}$$

Comme il y a plus d'inconnues que d'équations, ici il convient de réduire (car il n'y a pas de solution unique).

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 - 2L_1}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 + 2L_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1 \to L_1 + 5L_2 \\ L_3 \to L_3 + 2L_2}}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & -9 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_1 \to L_1 + 9L_3 \\ L_2 \to L_2 + 3L_3}}{\widetilde{\qquad}} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & u \end{array} \end{array}$$

Système associé :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & & +3z & & =7 \\ & y & & & =1 \\ & & & u & =2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=7-3z \\ y=1 \\ u=2 \end{array}\right.$$

Si $z=t$, avec $t\in\mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\left\{\begin{array}{l} x=7-3t \\ y=1 \\ z=t \\ u=2 \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{(infinité de solutions)}$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-3t \\ 1+0t \\ 0+1t \\ 2+0t \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.$$

Les variables x, y et u sont principales (ou liées).

La variable z est secondaire (ou libre).

3. Déterminer les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x - y + z = b \\ x + y + 3z = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Nous avons un système à 3 équations et 3 inconnues (x, y, z).

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 + L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\widetilde{}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & b+a \\ 0 & 0 & 2 & c-a \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\widetilde{}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-b \end{array}\right]$$

La condition d'existence des solutions est

$$c - 2a - b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 2a + b$$

- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $c \neq 2a + b$, alors le système n'a pas de solution
- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $c = 2a + b$, alors le système possède une infinité de solutions

Considérons le cas $c = 2a + b$. Nous avons :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\widetilde{\qquad}} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

Système associé :

$$\begin{cases} x + y \qquad = \frac{1}{2}(a-b) \\ \qquad\qquad z = \frac{1}{2}(a+b) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a-b) - y \\ z = \frac{1}{2}(a+b) \end{cases}$$

Si $y = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a-b) - t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}(a+b) \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \qquad \text{(infinité de solutions)}$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-b) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(a+b) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Théorème (Théorème d'existence et d'unicité).

Un système linéaire est consistant si et seulement si, lors de l'échelonnement, il n'y a pas de ligne de la forme

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid b \qquad \text{avec } b \neq 0.$$

Si un système linéaire est consistant, alors

- la solution est unique s'il n'y a pas de variables libres,
- le système possède une infinité de solutions s'il y a au moins une variable libre.

Soit m le nombre d'équations du système et soit n le nombre d'inconnues.

Voici quelques situations possibles :

$\boxed{m = n}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pas de solution — solution unique — infinité de solutions

$\boxed{m > n}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

pas de solution — solution unique — infinité de solutions

$\boxed{m < n}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right]$$

pas de solution — infinité de solutions

Théorème (Unicité de la forme échelonnée-réduite).

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Alors A est équivalente à une unique matrice échelonnée-réduite de taille $m \times n$.

Preuve. Voir l'Annexe A du livre de Lay ou le site Moodle du cours :

https://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=959673 ■

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ une matrice de taille 2×3 quelconque.

La matrice A est équivalente à l'une des matrices échelonnées-réduites suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & * \\ 0 & \mathbf{1} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(2 pivots)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(1 pivot)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(0 pivots)}$$