1. Equations linéaires

1.1. Systèmes d'équations linéaires

Motivation

Problème 1

Soient a et b deux nombres réels. Trouver un nombre réel x tel que $ax = b$.

Nous distinguons deux cas :

- si $a \neq 0$ alors
$$x = \frac{b}{a} \qquad \text{(solution unique)}$$
- si $a = 0$ alors nous avons deux possibilités :
  - si $b = 0$ nous avons $0 = 0$ et x peut être quelconque (infinité de solutions)
  - si $b \neq 0$ il n'y a pas de solution

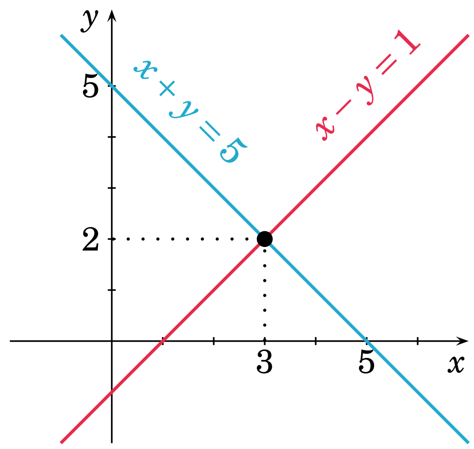
Problème 2

a) Trouver deux nombres réels x et y tels que

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Dans ce cas nous avons une solution unique :

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

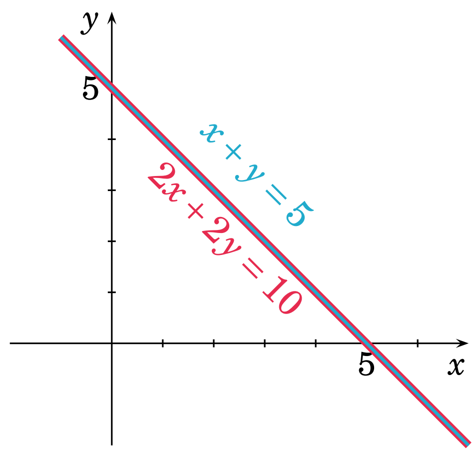


b) Trouver deux nombres réels x et y tels que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Dans ce cas nous avons une infinité de solutions :

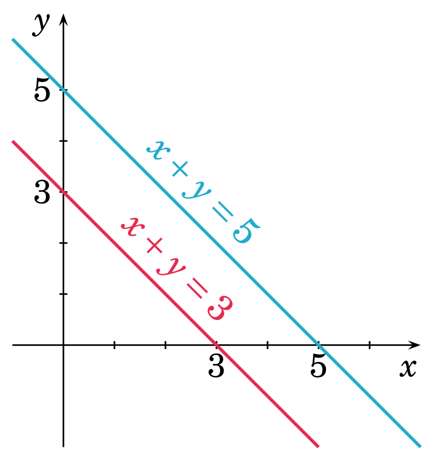
$$y = 5 - x$$



c) Trouver deux nombres réels x et y tels que

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$$

Dans ce cas il n'y a pas de solution.



Définition. Une *équation linéaire à n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une expression de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad \text{où } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ et } b \text{ sont des constantes.}$$

Les variables d'une équation linéaire sont souvent appelées *inconnues*.

Définition. Soient m et n des nombres entiers positifs.

Un *système d'équations linéaires à m équations et n inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un ensemble de m équations linéaires qui peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{array}\right. \tag{$*$}$$

où les nombres $a_{jk} \in \mathbb{R}$ (avec $j = 1, 2, \ldots, m$ et $k = 1, 2, \ldots, n$) sont appelés *coefficients* du système et les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ sont appelés *termes inhomogènes* du système.

Une *solution* de $(*)$ est un n-tuple $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait chaque équation du système.

La *solution générale* du système est l'ensemble de toutes les solutions de $(*)$. Elle est aussi appelée *ensemble solution*.

Un système d'équations linéaires est *consistant* (ou *compatible*) s'il possède au moins une solution. Dans le cas contraire, le système est *inconsistant* (ou *incompatible*).

Problème : Etant donné un système d'équations linéaires, déterminer s'il est consistant ou pas et si c'est le cas, déterminer la solution générale.

Théorème. Chaque système d'équations linéaires possède ou bien aucune, ou bien une ou bien une infinité de solutions. Il n'y a pas d'autre possibilité.

Proposition. La solution générale du système

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{array}\right. \qquad (*)$$

est la même que celle du système obtenu à partir de $(*)$ à l'aide des *opérations élémentaires* suivantes :

1) Echanger l'ordre des équations.

2) Multiplier une équation par un nombre non-nul.

3) Remplacer une équation du système par la somme de cette équation avec un multiple d'une autre équation du système.

Question. Comment résoudre un système d'équations ?

Considérons par exemple

$$\begin{cases} \;\; x + 2y = -1 & (1) \\ 3x + 7y = \;\;\, 1 & (2) \end{cases}$$

En remplaçant l'équation (2) par $(2) - 3\cdot(1)$ nous obtenons :

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ \qquad\; y = \;\;\, 4 \end{cases}$$

Ainsi, $y = 4$, $x = -1 - 2\cdot 4$ et la solution cherchée est

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = \;\;\, 4 \end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{cases} \quad -9 + 2\cdot 4 = -1\,, \\ 3(-9) + 7\cdot 4 = \;\;\, 1\,. \end{cases}$$

Remarque. Lorsque le nombre d'équations et le nombre d'inconnues est plus grand que deux, le calcul se fait de manière plus systématique à l'aide de matrices.

Définition. Une *matrice* de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn nombres réels disposés sur m lignes et n colonnes. Les éléments de la matrice sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de la matrice.

Nous utilisons des lettres majuscules pour noter les matrices :

$$A, B, \dots$$

et des lettres minuscules pour les coefficients :

a_{jk} est le coefficient de la matrice A situé à la j-ème ligne et la k-ème colonne.

Une matrice de taille $m \times n$ a la forme générale suivante :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} m \text{ lignes}$$

Exemple

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 où

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 3,\ a_{13} = 5,\ a_{21} = 4,\ a_{22} = 0,\ a_{23} = 7.$$

Notation : L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$. De plus, nous utilisons parfois la notation

$$A = \left[a_{jk} \right]$$

plutôt que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nous utilisons aussi la notation

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

où

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

sont les n colonnes de la matrice A.

Notation matricielle d'un système d'équations linéaires

Considérons le système d'équations linéaires à m équations et n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{array}\right. \qquad (*)$$

Définition. La matrice de taille $m \times (n+1)$ suivante :

$$[A \mid \vec{b}\,] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]}_{n+1 \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ a \\ a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} m \text{ lignes} \qquad (**)$$

est appelée *matrice augmentée associée au système* $(*)$.

La matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée *matrice des coefficients du système* $(*)$.

Le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ est appelé le *vecteur des termes inhomogènes*.

Opérations élémentaires sur les lignes

Comme les lignes de la matrice augmentée correspondent aux équations du système, les opérations élémentaires sur le système nous donnent des opérations élémentaires sur les lignes L_j de la matrice augmentée $[\,A\,|\,\vec{b}\,]$:

1) échanger deux lignes : $L_j \longleftrightarrow L_k$

2) multiplier une ligne par un nombre λ non-nul : $L_j \longrightarrow \lambda L_j$, avec $\lambda \neq 0$

3) additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne : $L_k \longrightarrow L_k + \lambda L_j$

Définition. La matrice A est *équivalente* à la matrice C si C peut être obtenue à partir de A à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim C$.

Exemples

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Théorème. Soient $\left[A \mid \vec{b}\,\right]$ et $\left[C \mid \vec{d}\,\right]$ les matrices augmentées associées à deux systèmes d'équations linéaires à m équations et n inconnues.
Si les matrices $\left[A \mid \vec{b}\,\right]$ et $\left[C \mid \vec{d}\,\right]$ sont équivalentes, alors les deux systèmes possèdent la même solution.

Preuve. Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les équations d'un système ne changent pas la solution générale du système. Par conséquent, les systèmes associés aux matrices augmentées $\left[A \mid \vec{b}\,\right]$ et $\left[C \mid \vec{d}\,\right]$ ont la même solution. ■

Conséquence. Pour trouver la solution générale d'un système d'équations linéaires, nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée de manière à obtenir une matrice augmentée associée à un système plus facile à résoudre.

Exemples

1. Considérons à nouveau le système

$$\begin{cases} x + 2y = -1 & (1) \\ 3x + 7y = 1 & (2) \end{cases}$$

Le remplacement de l'équation (2) par $(2) - 3 \cdot (1)$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_2 \to L_2 - 3L_1$. Nous avons donc

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \to L_2 - 3L_1}{\widetilde{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 - 3\cdot 1 & 7 - 3\cdot 2 & 1 - 3\cdot(-1) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

et nous retrouvons le système

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Plutôt que de faire la substitution de $y = 4$ dans la première équation, nous pouvons faire l'opération élémentaire sur les lignes $L_1 \to L_1 - 2L_2$ pour trouver

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{L_1 \to L_1 - 2L_2}{\widetilde{}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 - 2\cdot 0 & 2 - 2\cdot 1 & -1 - 2\cdot 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

ce qui nous donne la solution directement :

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 4 \end{cases}$$

2. Considérons la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

associée au système d'équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y - 2z &=& 1 \qquad (1) \\ y + 4z &=& 5 \qquad (2) \\ z &=& 3 \qquad (3) \end{array}\right.$$

Ce système peut être résolu à l'aide de la « substitution à rebours » :

La dernière équation nous donne $z = 3$. En insérant ce résultat dans (2), nous obtenons

$$y = 5 - 4 \cdot 3 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -7$$

En remplaçant $z = 3$ et $y = -7$ dans (1), nous trouvons

$$x = 1 + (-7) + 2 \cdot 3 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$$

Ainsi la solution du système est unique :

$$\left\{\begin{array}{rr} x = & 0 \\ y = & -7 \\ z = & 3 \end{array}\right. \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matrices échelonnées

Considérons une matrice quelconque. On dit qu'une ligne de la matrice est une *ligne nulle* si elle est constituée entièrement de zéros. Si une ligne n'est pas nulle, on appelle *coefficient principal* son coefficient non nul situé le plus à gauche. Si le coefficient principal est égal à 1, on l'appelle *pivot*.

Définition. Une matrice est dite *échelonnée* si elle possède les deux propriétés suivantes :

1) Toutes les lignes non nulles de la matrice sont situées au-dessus des lignes nulles.

2) Le coefficient principal d'une ligne est toujours situé à droite de celui de la ligne au-dessus.

Exemples

Les matrices suivantes sont échelonnées :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Par contre, les matrices suivantes ne le sont pas :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode d'élimination de Gauss

L'élimination de Gauss consiste à résoudre un système d'équations linéaires en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée de manière à obtenir une matrice échelonnée équivalente.

L'algorithme servant à résoudre un système d'équations par élimination de Gauss est simple. Il comprend généralement les étapes suivantes :

1) Ecrire la matrice augmentée du système d'équations à résoudre :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array}\right]$$

(où les $*$ représentent les coefficients et les termes inhomogènes du système).

2) Si nécessaire, échanger la première ligne avec une autre de manière à avoir $a_{11} \neq 0$.

3) Si $a_{j1} = 1$ pour un certain j, échanger la j-ème ligne avec la première ligne. Autrement, diviser la première ligne par $a_{11} \neq 0$ ou ajouter le multiple d'une autre ligne :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array}\right]$$

4) Pour $j \geqslant 2$, remplacer la ligne L_j par $L_j - a_{j1}L_1$, de manière à introduire des zéros au dessous du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \end{array}\right]$$

5) Répéter les pas 2) – 4) sur la sous-matrice augmentée obtenue en ignorant la première ligne et les premières colonnes de coefficients formées exclusivement de zéros. S'arrêter si toutes les colonnes de coefficients sont nulles :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \end{array}\right]$$

Répéter la procédure autant que possible :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & * & * \end{array}\right]$$

6) Considérer le système associé à la matrice augmentée ainsi obtenue et le résoudre.

Exemples

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$

matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3-3\cdot 1 & 6-3\cdot 1 & -5-3\cdot 2 & 0-3\cdot 9 \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 1 & -3-2\cdot 2 & 1-2\cdot 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 \to L_2 - L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3-2 & -11+7 & -27+17 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 2-2\cdot 1 & -7-2(-4) & -17-2(-10) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

systeme associé :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 & (1) \\ y - 4z = -10 & (2) \\ z = 3 & (3) \end{cases}$$

On remplace $z = 3$ dans (2) :

$$y - 4 \cdot 3 = -10 \quad \Longrightarrow \quad y = -10 + 12 \quad \Longrightarrow \quad y = 2$$

On remplace $z = 3$ et $y = 2$ dans (1) :

$$x + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = 9 - 2 - 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Solution unique : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Notation vectorielle : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Vérification :

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3x + y - 4z = 2 \\ 4x - y - 5z = 6 \end{cases}$

matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 - 3\cdot 1 & 1 - 3(-2) & -4 - 3(-1) & 2 - 3\cdot 1 \\ 4 - 4\cdot 1 & -1 - 4(-2) & -5 - 4(-1) & 6 - 4\cdot 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 7 - 7 & -1 + 1 & 2 + 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

L'équation associée à L_3 est

$$0x + 0y + 0z = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = 3 \quad \text{impossible}$$

Par conséquent, le système n'a pas de solution.