

Chapitre 1 | Systèmes d'équations linéaires (SEL)

1

- Dans cette séance, on va apprendre
- (i) reconnaître un SEL et l'écrire sous forme matricielle;
 - (ii) représenter graphiquement les solutions d'un SEL (avec 2 variables);
 - (iii) la notion de SEL équivalents et les opérations élémentaires sur les lignes;
 - (iv) les SEL incompatibles et compatibles, déterminés et indéterminés.

1.2.1.3 (début) Généralités

Déf 1.2 Un système d'équations linéaires (SEL) [aussi, système linéaire] en les variables $x_1, \dots, x_n$ est une famille d'équations du type

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{où } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et } b_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i \in \llbracket 1, m \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

lignes = eq. *coefficients du SEL* *second membre*

On dit que c'est un SEL de taille $m \times n$

Notation: On écrit souvent ∇ a_{ij} au lieu de a_{ij} 0

$\uparrow$ # variables
 $\uparrow$ # équations

Notation

$\llbracket a, b \rrbracket := \{i \in \mathbb{Z} : a \leq i \leq b\}$

Exemple A $(*) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$ est un SEL de taille 2×2

Déf 1.4 Étant donné le SEL $(*)$ dans la Déf. 1.2, une solution est un n -uplet $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait toutes les équations dans $(*)$, i.e. on a les identités dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{1,1}s_1 + \dots + a_{1,n}s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}s_1 + \dots + a_{m,n}s_n = b_m \end{cases}$$

1ère coordonnée *n-ème coordonnée*

On notera $S_{(*)}$ l'ensemble formé de toutes les solutions $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ de $(*)$

Dans ce cas on dit que $(*)$ est

(i) incompatible si $S_{(*)} = \emptyset$ *i.e. il n'y a aucune solution?*

(ii) compatible si $S_{(*)} \neq \emptyset$ *i.e. il y a au moins une solution?*

Motivation fondamentale de l'algèbre linéaire

= calculer l'ensemble de solutions d'un SEL (en particulier, déterminer si c'est incompatible ou compatible)

Exemple 1.5 | Le SEL de taille 2×2

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

est incompatible ∇ $\leftarrow$ Il n'y a aucune solution.

Exemple A (suite) | Le SEL de taille 2×2

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$

est compatible. En effet, $(1, -2)$ est une solution de $(*)$.

Comment ai-je trouvé ça? y a-t-il d'autres solutions?

Si l'on fait la 1ère éq. moins la 2ème, on trouve que toute solution de $(*)$ doit satisfaire

$$2x_1 = -1 - (-3) = 2$$

ce qui nous la 1ère coordonnée de n'importe quelle solution de $(*)$ est 1 .

La 2ème éq. dans $(*)$ nous dit alors que

$$1 + 2x_2 = -3 \Rightarrow 2x_2 = -3 - 1 = -4$$

ce qui nous dit que la 2ème coordonnée de n'importe quelle solution de $(*)$ est -2 .

En conséquence on a une et une seule solution de $(*)$, i.e. $S_{(*)} = \{(1, -2)\}$.

Exemple 1.6 | Le SEL de taille 2×2

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

est compatible. En effet $(1, -2)$ est (aussi) une solution de $(*)$.

Mais on a aussi que $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3, -2)$, ... sont des solutions de $(*)$.

En fait, on peut réécrire $(*)$ sous la forme $x_1 = 1 - x_2$, ce qui nous dit que $(1 - s_2, s_2)$ est une solution de $(*)$ pour tout $s_2 \in \mathbb{R}$.

En conséquence, $(*)$ admet une infinité de solutions différentes, qui donnent

$$S_{(*)} = \{(1 - s, s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Thm 1.7 | Si un SEL (*) possède au moins une solution (i.e. il est compatible) ²
 alors il possède exactement une solution ou il possède une infinité de solutions
 différentes.

Appelé Thm 0, 1, ∞.

(Preuve) Soient $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(s'_1, \dots, s'_n) \in \mathbb{R}^n$ deux solutions différentes de (*).
 Il suffit de montrer qu'il existe une quantité infinie de solutions différentes.
 Pour le voir, comme $(s_1, \dots, s_n)$ et $(s'_1, \dots, s'_n)$ sont différents, il existe un indice
 $i \in [1, n]$ tel que $s_i \neq s'_i$. On suppose s.p.d.g. ^{sans perte de généralité} que $i=1$. Alors, on affirme que

$$(ts_1 + (1-t)s'_1, \dots, ts_n + (1-t)s'_n) \in S_{(*)} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

En effet, la j -ème ligne de (*) devient

$$\begin{aligned} & a_{j,1}(ts_1 + (1-t)s'_1) + \dots + a_{j,n}(ts_n + (1-t)s'_n) \\ &= t a_{j,1}s_1 + (1-t) a_{j,1}s'_1 + \dots + t a_{j,n}s_n + (1-t) a_{j,n}s'_n \\ &= t \underbrace{(a_{j,1}s_1 + \dots + a_{j,n}s_n)}_{b_j} + (1-t) \underbrace{(a_{j,1}s'_1 + \dots + a_{j,n}s'_n)}_{b_j} \\ &= t b_j + (1-t) b_j = b_j \quad , \text{ pour tout } j \in [1, m], \end{aligned}$$

car $(s_1, \dots, s_n) \in S_{(*)}$
 et $(s'_1, \dots, s'_n) \in S_{(*)}$

i.e.

$$(ts_1 + (1-t)s'_1, \dots, ts_n + (1-t)s'_n) \in S_{(*)}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Comme $ts_1 + (1-t)s'_1 \neq t's_1 + (1-t')s'_1$ si $t \neq t'$, alors

$$\underbrace{\{(ts_1 + (1-t)s'_1, \dots, ts_n + (1-t)s'_n) : t \in \mathbb{R}\}}_{\text{infini}} \subseteq S_{(*)} \Rightarrow S_{(*)} \text{ infini. } \square$$

Déf. 1.4 (suite) | Un SEL compatible (*) est dit

(a) déterminé si $\#(S_{(*)}) = 1$

(b) indéterminé si $\#(S_{(*)}) > 1$ ($\Rightarrow \#(S_{(*)}) = \infty$).

(suite)
§1.3. Représentation et résolution graphique d'un SEL à 2 variables

On va considérer un SEL de taille $m \times 2$

$$(*) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 = b_m, \end{cases}$$

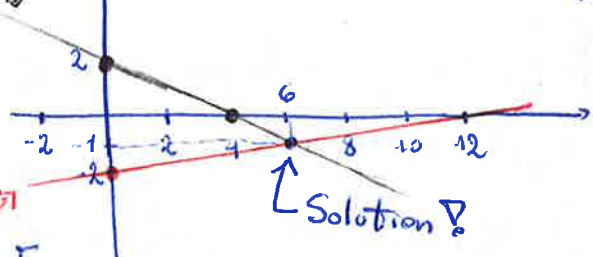
Point fondamental:

chaque éq. $a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 = b_j$ est une droite
donc S_* est une intersection de droites !

Exercice 3

$$(*) \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - 3x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 4, \end{cases}$$

Pour dessiner chaque droite il suffit de trouver 2 points sur chaque droite !



Pour dessiner $x_1 + 2x_2 = 4$ par exemple, on fixe $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$ est sur la droite;
 $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow (4, 0)$ est sur la droite.

(C'est pareil pour l'autre droite).

De façon analytique, pour résoudre $(*)$ on peut faire la 1ère éq. moins $\frac{1}{2}$ fois la 2ème, ce qui donne

$$-3x_2 - x_2 = 6 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 \Rightarrow -4x_2 = 4 \Rightarrow \underline{x_2 = -1}$$

Si l'on remplace cette valeur dans la 2ème éq. on trouve

$$x_1 + 2 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{x_1 = 6}$$

§1.4. SEL équivalents et opérations sur les lignes

Déf 1.12 | Étant donné le SEL $(*)$ dans la Déf. 1.2, on définit les opérations suivantes (où $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$)

(OEL I) On échange les lignes L_i et L_j dans $(*)$;

(OEL II) On multiplie la ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{R}^*$;

(OEL III) On remplace la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j \neq i$.

Façon abrégée

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

Ces opérations sont appelées opérations élémentaires sur les lignes (OEL) et [3] produisent un nouveau SEL si l'on les applique sur un SEL quelconque. La taille du SEL ne change pas.

Deux SEL $(*)$ et $(*)'$ sont équivalents (seules les lignes), ou (ligne-)équivalents si l'on peut obtenir $(*)'$ à partir d'une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes commençant par $(*)$, i.e.
 $(*) \xrightarrow{OEL_1} \dots \xrightarrow{OEL_p} (*)'$, où $OEL_1, \dots, OEL_p$ sont des opérations (OEL.I)-(OEL.III).

RK1 Les opérations élémentaires (OEL.I)-(OEL.III) sont inversibles et les inverses sont des opérations élémentaires sur les lignes:

		Exemples
$(*) \xrightarrow{O} (*)'$ est une opération élémentaire sur les lignes		(i) $(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = L_i \leftrightarrow L_j$
		(ii) $(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$
		(iii) $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$

O inversible | $(*) \xleftarrow{O^{-1}} (*)'$ est une opération élémentaire sur les lignes

Thm 1.14 Soient $(*)$ et $(*)'$ deux SEL ligne-équivalents.

Alors $S_{(*)} = S_{(*)'}$.

(Preuve) Il suffit de montrer que, si $(*) \xrightarrow{O} (*)'$ est une opération élémentaire sur les lignes (OEL.I)-(OEL.III), alors $S_{(*)} \subseteq S_{(*)'}$. Cela suit des définitions (OEL.I)-(OEL.III). En effet, (OEL.I) ne change pas l'ensemble des solutions, car on interchange deux lignes. De même, si $(s_1, \dots, s_n) \in S_{(*)}$ et l'on applique (OEL.II) (resp (OEL.III)), alors

$$(\lambda a_{i,1})s_1 + \dots + (\lambda a_{i,n})s_n = (\lambda b_i) \quad (\text{resp. } a_{i,1}s_1 + \dots + a_{i,n}s_n + \lambda(a_{j,1}s_1 + \dots + a_{j,n}s_n) = b_i + \lambda b_j)$$

$$(a_{i,1} + \lambda a_{j,1})s_1 + \dots + (a_{i,n} + \lambda a_{j,n})s_n$$

i.e. $(s_1, \dots, s_n) \in S_{(*)'}$.

cela veut dire que
 $a_{k,1}s_1 + \dots + a_{k,n}s_n = b_k, \forall k \in [1, m]$ ∇

□

RKB On a utilisé ces OEL pour résoudre des SEL ∇

On peut toujours résoudre un SEL en effectuant des OEL

(à venir)
 MÉTHODE
 DE
 GAUSS-JORDAN

Example 1.15

$$(*) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 6x_1 + 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \cancel{0}x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ \cancel{0}x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + \cancel{0}x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ \cancel{0}x_2 - 3x_3 = 7, \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow (-\frac{1}{3})L_3} \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ x_3 = -\frac{7}{3}, \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + \cancel{0}x_3 = \frac{27}{3}, \\ x_2 + \cancel{0}x_3 = -\frac{10}{3}, \\ x_3 = -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Also $S_{(*)} = \left\{ \left(\frac{27}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{7}{3} \right) \right\}.$

THM 1.14

Dans cette séance on va apprendre:

- (i) la définition de matrice et de matrice augmentée associées à un SEL;
- (ii) la définition de coefficient principal d'une ligne d'un SEL;
- (iii) la définition de matrice échelonnée et de matrice échelonnée réduite;
- (iv) la définition d'opération élémentaire sur les lignes d'une matrice et de matrices équivalentes selon les lignes ou ligne-équivalentes;
- (v) la définition de variables libres et liées d'un SEL réduit;
- (vi) la méthode de réduction de Gauss-Jordan;

§1.5 Matrices et algorithme de Gauss - Jordan

Déf 1.16 É.d. un SEL (*)
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

synonyme de tableau

• la matrice associée est le tableau à m lignes et à n colonnes donné par

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

• la matrice augmentée associée est le tableau à m lignes et $(n+1)$ colonnes donné par

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$$

parfois on écrit une ligne continue ou en trait tiré, ici on va faire une ligne pointillée/tirée

dont la dernière colonne est distinguée,

! La matrice augmentée associée à un SEL a la même information que le SEL, mais de façon plus compacte.

Equivalence SEL et matrices augmentées

Exemple 1.15 (suite) La matrice augmentée associée au SEL de l'Exemple 1.15 est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -7 & 5 \end{array} \right)$$

Déf. 1.12 (pour matrices/matrices augmentées)

Toutes les définitions dans Déf. 1.12 pour SEL ont aussi du sens pour les matrices/matrices augmentées. En particulier, on peut effectuer les (OEL.I)-(OEL.III) aux matrices/matrices augmentées, et deux matrices/matrices augmentées sont lignes-équivalentes si l'on obtient une de l'autre à partir d'une suite finie d'OEL.

Déf. 1.18 Si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$ est une matrice à m lignes et à n colonnes ($\begin{matrix} \text{c'est} \\ \text{dit} \\ \text{aussi} \end{matrix} \equiv A \text{ est de taille } m \times n$), alors

- le coefficient principal de la i -ème ligne de A est, s'il y en a un, le premier A_{ij} non nul en partant de la gauche (i.e. $A_{i,1} = \dots = A_{i,j-1} = 0$ et $A_{i,j} \neq 0$)

RRK Si la i -ème ligne de A est formée de zéros, il n'y a pas de coefficient principal!

- on dit que A est échelonnée si

(ECH.1) Toute ligne de A en dessous d'une ligne nulle est nulle

(ECH.2) Si L_i et L_j sont deux lignes non nulles de A avec $i < j$, A_{i,p_i} est le coefficient principal de L_i et A_{j,p_j} est le coefficient principal de L_j , alors $p_i < p_j$.

De façon graphique:

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \dots & A_{i,p_i} & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{j,p_j} & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_i \\ \leftarrow L_j \end{array}$$

Exemple C

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée}$$

coeff.
princip
OK

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée}$$

lignes nulles OK

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas échelonnée}$$

ligne nulle en dessus d'une ligne non nulle !!

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'est pas échelonnée}$$

deux
coeff.
princip.
dans la
même
colonne ?

ligne nulle OK

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'est pas échelonnée}$$

coefficients
princip. dans
le mauvais ordre ?

ligne nulle OK

Déf. 1.26 | Une matrice $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite

si elle est échelonnée et

(ECH.3) tous les coefficients principaux valent 1;

(ECH.4) si la colonne C_k de A inclut le coefficient principal d'une ligne L_i de A , alors les autres coefficients dans la colonne C_k sont nuls (i.e. $A_{j,k} = 0$, pour tout $j \neq i$).

On appelle pivot à tout coefficient principal d'une ligne nulle d'une matrice échelonnée réduite.

Exemple C (suite)

Ni A ni B ne sont matrices échelonnées réduites, mais

$$A \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont échelonnées réduites}$$

Thm 1.21 + 1.29 Toute matrice A de taille $m \times n$ est ligne équivalente à une matrice échelonnée réduite. En plus cette matrice échelonnée réduite est unique, i.e. si

$$\begin{array}{c} \text{OEL}_1 \quad \text{OEL}_p \\ A \rightarrow \dots \rightarrow E \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \text{OEL}'_1 \quad \text{OEL}'_p \\ A \rightarrow \dots \rightarrow E' \end{array}$$

avec OEL_i et OEL'_j des opérations élémentaires sur les lignes, E et E' des matrices échelonnées réduites, alors $E = E'$.

Comme la matrice échelonnée réduite dans le thm. précédent dépend uniquement de A , on l'appelle matrice échelonnée réduite de A ou (matrice échelonnée) réduite de Gauss-Jordan de A .

(Preuve de l'existence) = Méthode de Gauss-Jordan Si: $A = 0$ ✓, donc on suppose désormais $A \neq 0$.

Étape 1 | " $\exists \text{OEL}_1, \dots, \text{OEL}_p$ t.q. $A \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_p} F$ avec F matrice échelonnée dont les pivots valent 1."

On procède par récurrence sur la quantité de lignes de $A \neq 0$.

Cas $m=1$ | Soit λ le coeff. principal de A , qui possède une unique ligne non nulle. Alors $\lambda \neq 0$ et $A \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_1} F$ avec F échelonnée (réduite).

Cas $m > 1$ | (GJ1) En employant (OEL.I), A se transforme en une matrice ligne-équivalente A' telle que toute ligne en dessous d'une ligne nulle est nulle. $\leadsto A' = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ } lignes non nulles
 } lignes nulles

(GJ2) Comme $A \neq 0$, alors $A' \neq 0$. En employant (OEL.I), A' se transforme en une matrice ligne-équivalente A'' dont toutes les colonnes précédant le coefficient principal (non nul) de la première ligne sont nulles.

$$\leadsto A'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

colonnes nulles

} lignes non nulles
 } lignes nulles

(GJ3) On pose A''' à partir de $A'' \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_1} A'''$, i.e.

$$A''' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

↑ colonne d

} lignes non nulles
 } lignes nulles

est ligne-équiv à A''

(GJ4) On remplace chaque ligne non nulle L_i de A''' par $L_i - \frac{A'''_{i,j}}{\lambda} L_j$, ce qui nous donne une matrice ligne-équiv à A''' de la forme

$$A^{(iv)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} \text{ lignes nulles}$$

Si l'on applique l'hypothèse de la récurrence à B , on conclut que $B \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_q} F'$ avec F' matrice échelonnée dont les pivots valent 1. ∇

Alors

$$A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow A''' \rightarrow A^{(iv)} \xrightarrow{\text{OEL}} \dots \xrightarrow{\text{OEL}} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{suite d'OEL}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{suite d'OEL}}$

matrice échelonnée ∇
dont les pivots valent 1

Étape 2 "Si F matrice échelonnée dont les pivots valent 1, alors $\exists F \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_q} F$ avec F matrice échelonnée réduite"

On procède par récurrence ^{inversée} sur la quantité r de colonnes avec pivots de F qui ont des éléments non nuls autres que les pivots. Si $r=0$ $\checkmark$. Or, si $r>0$, soit C_q la dernière colonne avec un pivot avec un élément non nul autre que le pivot. On suppose (= la plus à droite) que le pivot de la colonne C_q est dans la ligne L_i . Alors, on remplace chaque ligne L_j de F pour $j < i$ par $L_j - F_{j,q} L_i$. La nouvelle matrice F' est ligne-équivalente à F , échelonnée, les pivots valent 1 et sont précisément situés dans les mêmes lignes et colonnes que ceux de F . En plus la colonne C_q de F' satisfait que tous ses éléments sont nuls sauf le pivot. Si l'on applique l'hypothèse de la récurrence inversée à F' , il existe $F' \xrightarrow{\text{OEL}_1} \dots \xrightarrow{\text{OEL}_q} F$ avec F matrice échelonnée réduite.

Comme

$$F \xrightarrow{\text{suite d'OEL}} \dots \xrightarrow{\text{suite d'OEL}} F' \xrightarrow{\text{suite d'OEL}} \dots \xrightarrow{\text{suite d'OEL}} F, \text{ alors le résultat est prouvé. } \square$$

Exemple 1.25* ^{modifié} Résoudre le SEL

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 9, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{la matrice} \\ \text{augmentée} \\ \text{associée} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivots

$$\begin{cases} x_1 = 16 + 4x_3 \\ x_2 = -11 - 3x_3 \end{cases}, \forall x_3 \in \mathbb{R} \Leftarrow \begin{cases} x_1 - 4x_3 = 16 \\ x_2 + 3x_3 = -11 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

forme échelonnée réduite

le SEL associé

superflue!

sont solutions de (*).

(Les formes échelonnées réduites donnent la solution du SEL directement!)

Déf. (p.3) | Étant donné un SEL (*) compatible

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

si l'on écrit (l'unique) SEL de la forme échelonnée réduite $\mathbf{I}$ de la matrice augmentée $\mathbf{A}$ de (*), alors

- les variables des colonnes avec pivots de $\mathbf{I}$ sont appelées variables liées (ou de base);
- les variables des colonnes qui ne contiennent pas des pivots de $\mathbf{I}$ sont appelées variables libres $\leftarrow$ parfois il n'y a pas $\nabla \equiv \begin{cases} \text{SEL} \\ \text{compatible} \\ \text{déterminé} \end{cases}$

SLOGAN | La forme échelonnée réduite permet d'écrire toutes les solutions d'un SEL compatible: chaque variable liée est exprimée en fonction de variables libres

Exemple 1.25 | ^{sans modifier} Résoudre le SEL

7

(*)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$$
 la matrice augmentée associée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -13 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

→

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

] Problème ∇∇

Pas de solution = SEL incompatible

Comment trouver la FER d'une matrice ?

(Méthode de Gauss-Jordan "en deux mots")

(Disclaimer)

In général vous n'allez pas utiliser l'algorithme exactement mais vous allez utiliser des raccourcis, basés sur votre propre expérience ← Pour cela, c'est très important de faire plusieurs calculs de FER.

- 1] Repérez la 1^{ère} colonne de A (à partir de la gauche) avec un coefficient non nul. Avec une (OEL.II) transformez le coefficient en 1 et avec une (OEL.I) mettez le coefficient 1 dans la 1^{ère} ligne.
 - 2] Avec des (OEL.III) transformez tous les autres coefficients de la colonne dans 1] en zéro (sauf le coefficient 1 dans la 1^{ère} ligne).
 - 3] Repérez la colonne suivante de la matrice obtenue après toutes ces OEL la plus proche à droite de la colonne dans 1] et qui possède un coefficient non nul dans une ligne autre que la 1^{ère}. Avec une (OEL.II) transformez le coefficient en 1 et avec une (OEL.I) mettez ce coefficient 1 dans la 2^{ème} ligne.
 - 4] Avec des (OEL.III) transformez tous les autres coefficients de la colonne dans 3] en zéro (sauf le coefficient 1 dans la 2^{ème} ligne).
 - 5] Après toutes ces OEL, repérez la colonne suivante après la colonne dans 3] et qui possède un coefficient non nul dans une ligne autre que la 1^{ère} et la 2^{ème}. Avec une (OEL.II) transformez le coefficient en 1 et avec (OEL.I) mettez ce coefficient 1 dans la 3^{ème} ligne.
 - 6] Avec des (OEL.III) transformez tous les autres coefficients de la colonne dans 5] en zéro (sauf le coefficient 1 dans la 3^{ème} ligne).
- (on continue jusqu'au moment où il n'y a plus de colonnes à repérer)

Dans cette partie, on va apprendre

- (i) à exprimer un vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- (ii) la notion de famille libre et liée;
- (iii) la notion de sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- (iv) la notion du produit entre matrice $n \times n$ et vecteur de $\mathbb{R}^n$;
- (v) la forme vectorielle d'un SEL.

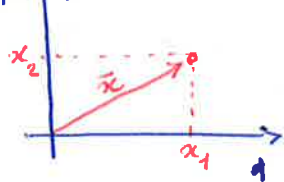
§2.1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Déf (p.19) | Vecteur = vecteur colonne est un uplet $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, que l'on va représenter sous forme de colonne

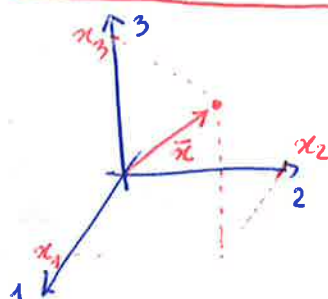
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

← dans les notes de Sacha et dans les séries on écrit **x** (en gras), mais pour simplifier la vie ici on écrit $\vec{x}$.

Graphiquement



pour $\mathbb{R}^2$



Égalité | Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
 $\vec{x} = \vec{y}$ ssi $x_i = y_i$
 $\forall i \in [1, n]$

Opérations avec vecteurs

Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vecteurs), $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (vecteurs) et $\lambda \in \mathbb{R}$ (scalaire), on pose

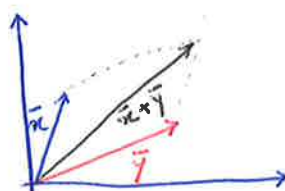
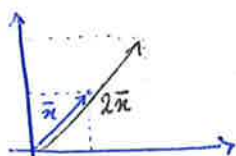
$$\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

multiplication par un scalaire

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

somme de vecteurs

Graphiquement



(règle du parallélogramme)

On rappelle aussi le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$

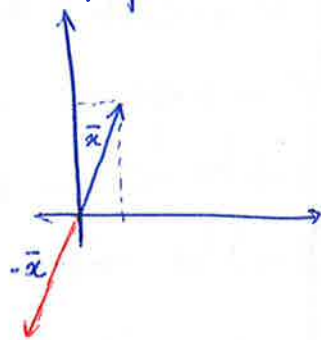
$$(\text{ou } \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

si on veut être très

et précis

et pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, son vecteur opposé $-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$

Graphiquement



Prop. 2.1 | Pour $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (commutativité de la somme)
 - $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (associativité de la somme)
 - $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
 - $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
 - $(\lambda\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$ (associativité mixte)
- (distributivité)

(Preuve) Exercice ∇

Déf. 2.4 | On dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^n$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ ou $\vec{x} = \lambda\vec{y}$

Question | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ? Oui ∇ Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}$ et $\mathbf{0}$ sont colinéaires.

§ 2.3. Combinaisons linéaires et parties engendrées

Déf. 2.7 | É.d. $\mathcal{I} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$, une combinaison linéaire (CL) des éléments de $\mathcal{I}$ est un vecteur de la forme

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. On appelle $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les coefficients de la combinaison linéaire.

Exemple 2.9 | On considère

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\bar{w}$ est-il une C.L. de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$?

Si oui, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 = \bar{w}$, i.e.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 3 \end{cases} \quad (*)$$

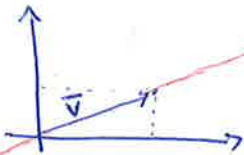
mais le SEL (*) est incompatible, car la 3ème éq. nous dit que $\alpha_2 = -3$, la 2ème donc que $\alpha_1 = 3/2$ mais $(-3) \cdot 3/2 + (-3) \neq 4$!

Déf 2.11 | E.d. $\mathcal{E} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, la partie de $\mathbb{R}^n$ (ou sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$) engendrée par $\mathcal{E}$ est

$$\text{Vect } \mathcal{E} = \text{Vect } \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} = \left\{ \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}$$

toutes les C.L. des vecteurs dans $\mathcal{E}$!

Exemple D | Pour $\bar{v} \neq 0$, $\text{Vect}\{\bar{v}\} =$ droite engendrée par $\bar{v} = \{\lambda \bar{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$



$\text{Vect}\{\bar{v}\}$

trop longs par contre...

§ 2.4. Familles libres et liées

Déf. 2.16 | Une famille $\mathcal{E} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite liée (ou linéairement dépendante) s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ [dont au moins un est non nul] tels que

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = 0$$

Une famille $\mathcal{E} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est libre (ou linéairement indépendante) si elle n'est pas liée.

Question De quelle façon équivalente on peut dire que $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ est libre.

(i) Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \mathbf{0}$. ✗

(ii) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, si $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k = \mathbf{0}$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. ✓

(iii) $0\bar{v}_1 + \dots + 0\bar{v}_k = \mathbf{0}$. ✗

(iv) É.d. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul, alors $\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_k \bar{v}_k \neq \mathbf{0}$. ✓

Question La famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est-elle libre?

Non! Toute famille avec le vecteur nul est liée.

Exemple 2.18 Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Est-ce que $\mathcal{F}$ est libre?

On pose

$$(*) \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ quelconques.}$$

$\mathcal{F}$ est libre ssi la seule possibilité est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Or, (*) équivaut à

$$(*) \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ -3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array} \right)$$

$$(*)' \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftarrow$$

ce qui nous dit que $\mathcal{F}$ est libre.

Thm 2.20 | Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est liée ss'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\bar{v}_i$ est C.L. des vecteurs $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_n\}$.

(Preuve) ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{F}$ est liée, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ pas tous nuls tels que

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \mathbf{0}$$

Il existe donc $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$:

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = (\lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_{i-1} \bar{v}_{i-1}) + \overset{\neq 0}{\lambda_i} \bar{v}_i + (\lambda_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \lambda_n \bar{v}_n)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \bar{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \bar{v}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \bar{v}_n \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$) Si $\bar{v}_i = \mu_1 \bar{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \mu_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \mu_n \bar{v}_n$ avec $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$

alors

$$\mu_1 \bar{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \bar{v}_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} \bar{v}_i + \mu_{i+1} \bar{v}_{i+1} + \dots + \mu_n \bar{v}_n = \mathbf{0}$$

i.e. $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est liée. □

Déf (p. 27) + Exercice A

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_3}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_n} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Montrer que

• $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est libre + $\text{Vect } \mathcal{B}_{\text{can}} = \mathbb{R}^n$,

Chapitre 3 | Formes vectorielles des SEL

§ 3.1 + 3.2. Généralités

Déf. 3.1 | Si $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$, on notera $A := [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$

Si $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ on écrira $A \bar{x} := x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

(coincident)
produit d'une matrice et un vecteur $\uparrow$ cette CL

Lemme 3.2 | Pour une matrice A de taille $m \times n$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$A(\bar{x} + \lambda \bar{y}) = A\bar{x} + \lambda A\bar{y} \quad \leftarrow \text{linéarité}$$

(Preuve) On suppose $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Alors

$$\begin{aligned} A(\bar{x} + \lambda \bar{y}) &= [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{pmatrix} = (x_1 + \lambda y_1) \bar{a}_1 + \dots + (x_n + \lambda y_n) \bar{a}_n \\ &= (x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n) + \lambda (y_1 \bar{a}_1 + \dots + y_n \bar{a}_n) = A\bar{x} + \lambda A\bar{y}. \quad \square \end{aligned}$$

Point clé

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

SEL $\equiv A\bar{x} = \bar{b}$ $\leftarrow$ Forme vectorielle du SEL

$\triangle$ On ne va pas donc faire des distinctions entre

$$\text{SEL} \equiv \text{Matrices augmentées} \equiv \text{Formes vectorielles des SEL}$$

Dans cette séance, on va apprendre

- (i) la notion de SEL homogène et inhomogène;
- (ii) la notion de solution triviale d'un SEL homogène;
- (iii) le lien entre le SEL homogènes et les familles liées/libres;
- (iv) une caractérisation de S_* en fonction du SEL homogène associé.
- (v) la notion d'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, image, préimage (ou image inverse)

3.3. SEL homogènes et inhomogènes

Déf 3.3 Un SEL (écrit sous forme vectorielle) $\underbrace{A}_{\substack{\text{matrice} \\ m \times n}} \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\bar{b}}_{\in \mathbb{R}^m}$ est dit $\begin{cases} \rightarrow \text{homogène} & \text{si } b = 0; \\ \rightarrow \text{inhomogène} & \text{si } b \neq 0. \end{cases}$

RK.D Un SEL homogène $A, \bar{x} = \bar{0}$ admet au moins une solution!
 c'est la solution triviale $\bar{x} = \bar{0}$ $\in \mathbb{R}^n$

Exemple 3.7* (modifié)

Soit le SEL inhomogène $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right)$

Pour résoudre, il suffit d'appliquer des OEL:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

i.e. $\begin{cases} x_1 - x_3 = -3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + x_3 \\ x_2 = 4 - 2x_3 - x_4 \end{cases}$

Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 + x_3 \\ 4 - 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sol de } A\bar{x} = \bar{b}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\text{sol de } A\bar{x} = \bar{0}}$$

remarquer q'a après le Thm 3.9

primitives $\Downarrow$ variables liées

Point clé

Pour $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^m$

le SEL homogène

$$\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ liée} \iff \underbrace{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\bar{x}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \text{ admet une solution non triviale.}$$

(Preuve) $\Rightarrow$ β : $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ liée, alors $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tels que $x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = 0$ $\xrightarrow[\text{aussi}]{\text{s'écrit}}$ $[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ $\xrightarrow{\parallel}$ $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$

Comme au moins un x_i est non nul, $\bar{x} \neq 0$ (de $\mathbb{R}^n$), i.e. $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$

$[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \cdot \bar{x} = 0$ admet une solution non triviale.

$\Leftarrow$ La réciproque suit de renverser toutes les implications précédentes. $\square$

Application $\rightarrow$ [Thm 3.9] Soit $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^m$. Si $p > m$, alors $\mathcal{F}$ liée.

(Preuve) Soit $A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p] \leftarrow$ matrice $m \times p$

Le SEL homogène $[\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p] \cdot \bar{x} = 0$ se traduit en la matrice

augmentée $[A|0] = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_p | 0] = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,p}}_{\in \mathbb{R}^p} | \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \\ \vdots \\ \underbrace{a_{m,1} \dots a_{m,p}}_{\in \mathbb{R}^p} | \underbrace{0}_{\in \mathbb{R}^m} \end{pmatrix}$. On calcule la FER

associée de $[A|0]$.

Comme $p > m$ de façon générale on l'écrit comme ça au moins une colonne ne contient pas de pivot $!!$

$\Rightarrow$ il y a au moins une variable libre $\uparrow$ (de la partie à gauche de la) ligne pointillée $\Rightarrow$ le SEL $A\bar{x} = 0$ admet une infinité de solutions $\Rightarrow$ il y a au moins une solution non triviale

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ est liée. $\square$

Point clé

Revenir sur la fin de l'Exemple 3.7*

[Thm 3.10] Soit $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ un SEL inhomogène et soit $(*)_h A \cdot \bar{x} = 0$ le SEL homogène associé. Soit $\bar{v}_p \in \mathbb{R}^n$ une solution de $(*)$. Alors $S_{(*)} = \{ \bar{v}_p + \bar{v}_h : \bar{v}_h \in S_{(*)_h} \}$ $\uparrow$ i.e. $A \cdot \bar{v}_p = \bar{b}$

(Preuve) 2) Si $\bar{v}_h \in S_{(*)_h}$, alors $A \cdot (\bar{v}_p + \bar{v}_h) = \underbrace{A\bar{v}_p}_{\bar{b}} + \underbrace{A\bar{v}_h}_{\bar{0}} = \bar{b}$ [12]
 i.e. $\bar{v}_p + \bar{v}_h \in S_{(*)}$.

3) Soit $\bar{v} \in S_{(*)}$, i.e. $A\bar{v} = \bar{b}$. Alors $\bar{v} = \bar{v}_p + (\bar{v} - \bar{v}_p)$
 et $A \cdot (\bar{v} - \bar{v}_p) = A\bar{v} - A\bar{v}_p = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$, i.e. $\bar{v} - \bar{v}_p \in S_{(*)_h}$. □

SLOGAN

Abs, si l'on connaît UNE solution de $(*)$ et toutes les solutions de $(*)_h$, on connaît TOUTES les solutions de $(*)$

Exemple 3.11

$$(*) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = -9, \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

On voit par exemple que $\bar{v}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une solution de $(*)$, car

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \checkmark$$

On calcule maintenant les solutions de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)_h$

Par la méthode de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

pivots $\Rightarrow$ variables liées $= x_1, x_2$

ce qui nous dit que

$$S_{(*)_h} = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alors

$$S_{(*)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

§ 3.4. Applications linéaires

Motivées par le Lemme 3.2 on introduit cette définition:

↓ synonyme de "fonction" (mais plus "fancy")

Déf 3.13 Une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite linéaire si $T(\vec{v} + \lambda \vec{w}) = T(\vec{v}) + \lambda T(\vec{w})$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

⚠ Noter que l'on a écrit une unique condition au lieu de deux dans la définition précédente (cf. avec les notes de Sacha Friedli).

Les deux versions de la définition sont équivalentes. Exercice: Prouvez-le

(voir "Quelques propriétés")

Exemple I Par le Lemme 3.2, si A est une matrice de taille $m \times n$, alors l'application $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui associe $A \cdot \vec{x}$ à $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est linéaire.

Important! On va voir que
Tous les exemples d'applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
sont comme ceux de l'Exemple I.

Exemple F L'application $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

est linéaire, car

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ x_3 + \lambda y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_2 + \lambda y_2) - 5(x_3 + \lambda y_3) \\ (x_1 + \lambda y_1) + (x_3 + \lambda y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 + \lambda(2y_2 - 5y_3) \\ (x_1 + x_3) + \lambda(y_1 + y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2y_2 - 5y_3 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix}$$

Aussi: $T = TA$ avec Δ
 Sinon: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$$= T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \lambda T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

(Non) Exemple 3.16 L'application $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

n'est pas linéaire, car
 $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quelques propriétés

• Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire, alors $T(0) = 0$

(Preuve) Comme $T(0) = T(0 + 1 \cdot 0) = T(0) + 1 \cdot T(0) = T(0) + T(0)$,
 alors $T(0) = 0$.

Rappel
 linéaire ou non

Def 3.12 Pour une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on définit l'image de

$$T \text{ via } \text{Im}(T) := \{ \underline{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \underline{v} \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \underline{w} = T(\underline{v}) \}$$

$$= \{ T(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

On rappelle aussi que $\underline{w} = T(\underline{v})$ s'appelle image de $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ par T .
 et $\underline{v}$ s'appelle image inverse de $\underline{w} \in \mathbb{R}^m$ par T .
 (ou préimage)

deux usages du mot image

Déf. A | On rappelle de façon plus générale, que si:
 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application (linéaire ou non)
et $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S' \subseteq \mathbb{R}^m$, on définit

• $T(S) := \{ \bar{w} \in \mathbb{R}^m : \exists \bar{v} \in S \text{ t.q. } T(\bar{v}) = \bar{w} \} = \{ T(\bar{v}) : \bar{v} \in S \}$

(alors $\text{Im}(T) = T(\mathbb{R}^n)$!)

que l'on appelle image (directe) de S par T ;

• $T^{-1}(S') := \{ \bar{v} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{v}) \in S' \}$

que l'on appelle image inverse (ou préimage) de S' par T .

Dans ce langage : $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ équivaut à $T_A(\bar{x}) = \bar{b}$

$(*)$ est compatible ssi $\bar{b} \in \text{Im}(T_A)$

$$S_{(*)} = T_A^{-1}(\{\bar{b}\})$$

$$S_{(*)_n} = T_A^{-1}(\{\emptyset\})$$

Dans cette séance on va voir:

- (i) la définition d'espace vectoriel, ainsi que plusieurs exemples $(\mathbb{R}^n, \mathbb{P}_n, \dots)$;
- (ii) la notion de sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel;
- (iii) les notions de famille libre et liée dans un espace vectoriel;
- (iv) la définition de sous-espace vectoriel engendré par une famille
- (v) la définition de combinaison linéaire de vecteurs dans un espace vectoriel

Cas d'un
esp. vect.
 $\mathbb{C}^n$!
 $\mathbb{R}^n$!

§ 4.2. Définition d'espace vectoriel

Déf 4.2 | Un espace vectoriel (réel) est un ensemble non vide V muni de deux applications:

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V & (\text{addition}) & \text{ et } & \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V & (\text{ou produit}) \\ (v, w) &\longmapsto v + w & \text{ ou } & & (\lambda, v) &\longmapsto \lambda \cdot v & (\text{multiplication par des scalaires}) \\ & & (\text{somme}) & & & & \end{aligned}$$

satisfaisant aux propriétés:

- (EV.1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (commutativité);
- (EV.2) $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$ (associativité);
- (EV.3) il existe un élément $0_V \in V$ tel que $u + 0_V = u, \forall u \in V$; ($0_V =$ vecteur nul de V)
- (EV.4) pour tout $u \in V$ il existe un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$; ($-u =$ vecteur opposé de u)
- (EV.5) $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v, \forall u, v \in V, \forall c \in \mathbb{R}$; (distributivité I)
- (EV.6) $(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u, \forall u \in V, \forall c, d \in \mathbb{R}$; (distributivité II)
- (EV.7) $c \cdot (d \cdot u) = (c \cdot d) \cdot u, \forall u \in V, \forall c, d \in \mathbb{R}$; (associativité mixte)
- (EV.8) $1 \cdot u = u, \forall u \in V$.

Désormais, sauf indication contraire vecteur = élément d'un espace vectoriel donné ▽

Exemple G | (1) L'ensemble $V = \mathbb{R}^n$ avec la somme $V \times V \rightarrow V$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et la multiplication par des scalaires } \mathbb{R} \times V \rightarrow V \text{ donnée par}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \text{ est un espace vectoriel. Dans ce cas } 0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{on l'écrit typiquement } \vec{0}$$

et $-\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

(2) L'ensemble $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction}\}$ avec la somme $V \times V \rightarrow V$ ^{(on écrit parfois $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ou $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)}

donnée par $(f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et la multiplication par scalaires $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

donnée par $(\lambda.f)(t) = \lambda.f(t), \forall t \in \mathbb{R}$ (avec $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$) est un espace vectoriel (Exercice 1, (e) de la série 3). Dans ce cas 0_V est la fonction

nulle, i.e. $0_V(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, et, si $f \in V$, alors $(-f)(t) = -f(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

(3) On rappelle qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomiale s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \forall t \in \mathbb{R}$. Dans ce cours,

polynôme = fonction polynomiale (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ^{notation standard d'un polynôme} (cela est OK lorsqu'on travaille avec des coefficients dans $\mathbb{R}$).

Un fait fondamental sur les polynômes est

$$a_0 + \dots + a_n t^n = b_0 + \dots + b_m t^m, \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{ssi} \quad a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots \quad (*)$$

(on va l'utiliser plusieurs fois sans l'expliciter) ← Noter que $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n + 0 t^{n+1}$

On note $\mathbb{P} := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction polynomiale}\}$. Si $f \in \mathbb{P}$ et donc $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on dit que

$\deg(f) = -\infty$ si $a_0 = \dots = a_n = 0$ et $\deg(f) = n$ si $a_n \neq 0$. (^{degré} de f)

On note aussi $\mathbb{P}_n := \{f \in \mathbb{P} : \deg(f) \leq n\}$.

cette définition est OK grâce à $(*)$.

On considère la somme $\mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ donnée par

$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in \mathbb{R}$ et la multiplication par scalaires $\mathbb{R} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ donnée par $(\lambda.f)(t) = \lambda.f(t), \forall t \in \mathbb{R}$ (ce sont les mêmes que pour $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction}\}$)

On vérifie que si $f, g \in \mathbb{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g \in \mathbb{P}$ et $\lambda.f \in \mathbb{P}$ aussi. En effet, si $f = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ et $g = b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$, alors (on suppose $n \leq m$)

$$(f+g)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \dots + (a_n + b_n)t^n + b_{n+1}t^{n+1} + \dots + b_m t^m \in \mathbb{P}$$

$$(\lambda.f)(t) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + \dots + (\lambda a_n)t^n \in \mathbb{P}.$$

Alors, $\mathbb{P}$ est un espace vectoriel (Exercice 1, (b) de la série 3).

Dans ce cas, $\mathcal{O}_P$ est la fonction nulle (ou polynôme nul) et, si $f \in P$, de la forme $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, alors $(-f)(t) = (-a_0) + (-a_1)t + \dots + (-a_n)t^n, \forall t \in \mathbb{R}$. Avec l'addition et la multiplication par scalaires précédents appliquées à des éléments de P_n on voit que P_n est un espace vectoriel (Exercice 1, (a), de la série 3). Pour le montrer, vous allez utiliser que

$\deg(f + g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$ pour tous $f, g \in P$

(4) L'ensemble $V = M_{m \times n}(\mathbb{R}) := \{ A \text{ matrice de taille } \overset{\substack{\text{m lignes} \\ \downarrow}}{m} \times \overset{\substack{\text{n colonnes} \\ \downarrow}}{n} \text{ à coefficients réels} \}$

muni de la somme $V \times V \rightarrow V$ donnée par

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,n} + B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} + B_{m,1} & \dots & A_{m,n} + B_{m,n} \end{pmatrix}$$

et la multiplication par scalaires $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ donnée par

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$$

est un espace vectoriel. Dans ce cas

$\mathcal{O}_V = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

on le note typiquement $\mathbf{0}$

et

$-\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{1,1} & \dots & -A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -A_{m,1} & \dots & -A_{m,n} \end{pmatrix}$

Quelques propriétés (voir Exercice 2 de la série 3)

- (a) L'élément $\mathcal{O}_V$ de V qui satisfait (E.V.3) est unique
- (b) L'élément $-u$ de V associé à chaque $u \in V$ est unique
- (c) + (d) $0 \cdot u = \mathcal{O}_V, \forall u \in V$; $-\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_V$ et $c \cdot \mathcal{O}_V = \mathcal{O}_V, \forall c \in \mathbb{R}$
- (e) $(-1) \cdot u = \underbrace{-u}_{\text{opposé de } u \in V}, \forall u \in V$

on peut donc parler du vecteur nul! (il n'y a pas plusieurs dans V)

on peut donc parler du vecteur opposé de u (il n'y a pas plusieurs dans V)

La notion d'espace vectoriel essaie de donner un langage
SLOGAN = structure commune pour traiter plusieurs types d'exemples
 de façon simultanée!

Observation: On a les espaces vectoriels $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P} \subseteq \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \right\}$
 fonction
 En fait plusieurs espaces vectoriels se trouvent naturellement à l'intérieur
 d'autres espaces vectoriels $\rightarrow$ **Notion de sous-espace vectoriel**

Déf. 4.19 Soit V un espace vectoriel avec somme $V \times V \rightarrow V$ et multiplication
 par scalaires $(\mathbb{R} \times V \rightarrow V)$ $(u, v) \mapsto uv$
 $(\lambda v) \mapsto \lambda v$. Une partie $W \subseteq V$ est dite un sous-espace vectoriel
 de V si
 (SEV.1) $0_V \in W$;
 (SEV.2) $u + v \in W$ pour tous $u, v \in W$;
 (SEV.3) $\lambda \cdot u \in W$ pour tout $u \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

sous-entendues en général

Prop Pour V un espace vectoriel comme dans la Déf 4.19 et $W \subseteq V$ une
 partie, alors W est un sous-espace vectoriel si et seulement si
 (SEV.1) $0_V \in W$ et (SEV.2') $u + \lambda v \in W$, pour tous $u, v \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Preuve) C'est clair que (SEV.2) + (SEV.3) impliquent (SEV.2'). On
 va montrer que (SEV.1) + (SEV.2') impliquent (SEV.2) et (SEV.3).
 D'abord, (SEV.2') avec $\lambda = 1$ nous dit que $u + 1 \cdot v \in W$, i.e. $u + v \in W$,
 d'après (EV.8). Finalement, (SEV.2') avec $u = 0_V \in W$, d'après (SEV.1) !
 nous dit que $0_V + \lambda \cdot v \in W$, i.e. $\lambda v \in W$, d'après (EV.1) et (EV.3). $\square$

Exemple A $\mathbb{P} \subseteq \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction} \}$ est un sous-espace vectoriel
 de $\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction} \}$.

Exemple 4.22 $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}$.

Exemple 4.23 / La partie $\{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (exercice). [16]

La définition suivante est la même que celle donnée pour $\mathbb{R}^n$, mais dans un contexte plus général :

Déf. 4.14 / Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une famille de vecteurs de V . Une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$ est une expression de la forme

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \quad \leftarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ sont les coefficients de la combinaison linéaire.})$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. En plus, on dit que $\mathcal{F}$ est liée (ou linéairement dépendante) dans V s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ dont au moins un est non nul tels que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0_V.$$

Si $\mathcal{F}$ n'est pas liée, on dit que $\mathcal{F}$ est libre (ou linéairement indépendante) dans V .

RK E / Pour $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, les notions de combinaison linéaire, famille liée et famille libre sont les mêmes que celles vues précédemment pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4.16 / Soit $V = \mathbb{P}$ et la famille $\mathcal{F} = \{1, t, t^2, \dots, t^p\} \subseteq \mathbb{P}$. Alors $\mathcal{F}$ est libre. En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^2 + \dots + \lambda_{p+1} \cdot t^p = 0_{\mathbb{P}}$$

D'après le fait fondamental (*) sur les polynômes, polynôme nul que

$$0_{\mathbb{P}} = 0 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot t^p + 0 \cdot t^{p+1} + \dots, \text{ on a que}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{p+1} = 0$,
ce qui nous dit que $\mathcal{F}$ est libre dans $\mathbb{P}$.

Déf. 4.25 / Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une famille de vecteurs de V . On définit la partie engendrée par $\mathcal{F}$ (ou le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$) par

$$\text{Vect } \mathcal{F} (= \text{Vect } \{v_1, \dots, v_p\}) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p : \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \right\}$$

ensemble de toutes les combinaisons linéaires des éléments de la famille $\mathcal{F}$

[Rk.F] Pour $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, on trouve la même définition que celle qu'on a vue pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Propriété fondamentale (Lemme 4) Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une famille. Alors $\text{Vect } \mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de V .

(Preuve) On voit bien que

$$0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}.$$

En outre, si $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}$ et $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p \in \text{Vect } \mathcal{F}$, alors

$$\begin{aligned} u + \lambda w &\stackrel{(\text{EV.1})}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + \lambda (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p) \stackrel{(\text{EV.6})}{=} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p + (\lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda \mu_p) v_p \\ &\stackrel{(\text{EV.1})}{=} (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda \mu_p) v_p \stackrel{(\text{EV.6})}{=} (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_p + \lambda \mu_p) v_p \in \text{Vect } \mathcal{F} \quad \square \end{aligned}$$

Exemple 4.26 Soit $\mathbb{P}$ l'espace vectoriel de polynômes et

$$\mathcal{F} = \{1, t, t^2\}. \text{ Alors } \text{Vect } \mathcal{F} = \{ \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot t + \lambda_3 \cdot t^2 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

On affirme que $\text{Vect } \mathcal{F} = \mathbb{P}_2$. En effet, on voit bien que

$$\deg(\lambda_1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2) \leq 2 \text{ pour tout } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

ce qui implique que $\text{Vect } \mathcal{F} \subseteq \mathbb{P}_2$. En outre, si $f \in \mathbb{P}_2$, alors

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \text{ avec } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \text{ ce qui nous dit que } f \text{ est une combinaison linéaire des éléments dans } \mathcal{F}, \text{ i.e. } f \in \text{Vect } \mathcal{F}.$$

En conséquence $\mathbb{P}_2 \subseteq \text{Vect } \mathcal{F}$, ce qui nous dit que $\mathbb{P}_2 = \text{Vect } \mathcal{F}$.

Dans cette séance on va voir

- (i) la définition (abstraite) d'application linéaire, avec quelques exemples;
- (ii) les définitions de noyau et d'image d'une application linéaire;
- (iii) la matrice canonique d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$;
- (iv) les opérations sur les matrices (somme, produit, inverse, transposée, etc);
- (v) la matrice identité.

cela
inclut
les cas
 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

On va omettre les sections 4.5, 4.7, 4.8, ainsi que Lemme 6 et Thm. 4.46 pour l'instant ☹☹☹

§ 4.6. Applications linéaires entre espaces vectoriels

On rappelle cette définition (généralisation de la Déf. A)

Déf. 4.37 | Soit $f: V \rightarrow V'$ une application entre deux ensembles V et V' .

Pour $v \in V$, $v' = f(v) \in V'$ est l'image de v par f , et v est un antécédent ou une préimage (ou image inverse) de v' par f .

Pour $S \subseteq V$ et $S' \subseteq V'$ deux parties, on rappelle aussi:

$$f(S) = \{v' \in V' : \exists v \in S \text{ t.q. } f(v) = v'\} = \{f(v) : v \in S\} \leftarrow \text{image de } S \text{ par } f$$

$$f^{-1}(S') = \{v \in V : f(v) \in S'\} \leftarrow \text{image inverse (ou image réciproque ou préimage) de } S' \text{ par } f$$

et

$$\text{Im } f = f(V) = \{v' \in V' : \exists v \in V \text{ t.q. } f(v) = v'\} = \{f(v) : v \in V\} \leftarrow \text{image de } f$$

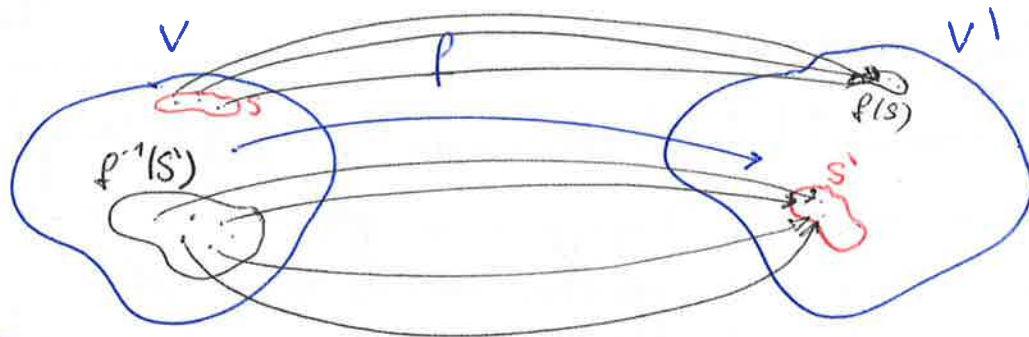
ainsi que

Déf. 4.38 | Une application $f: V \rightarrow V'$ entre deux ensembles V et V'

est dite

- injective si, pour toute paire $(v, w) \in V^2$ avec $v \neq w$, alors $f(v) \neq f(w)$; ($\equiv \forall v, w \in V, f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$)
- surjective si, pour tout $v' \in V'$, il existe $v \in V$ t.q. $f(v) = v'$
- bijjective si elle est injective et surjective.

Définitions générales pour ensembles



RK G(p.62) Si $f: V \rightarrow V'$ est bijective, l'application $V' \rightarrow V$ qui associe à $v' \in V'$ l'unique $v \in V$ t.q. $f(v) = v'$ est bien définie. Elle s'appelle application réciproque de f , et elle est notée f^{-1} .

Déf. 4.39 Soient V et V' deux espaces vectoriels. Une application $f: V \rightarrow V'$ est dite linéaire si $f(v + \lambda w) = f(v) + \lambda f(w)$, $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

RK H C'est la même définition que celle dans Déf. 3.13 pour $V = \mathbb{R}^n$ et $V' = \mathbb{R}^m$. En plus, la condition précédente n'est pas précisément la même que celle dans le notes de Sacha Friedli, mais les deux sont équivalentes! Noter que si T est linéaire, $T(\mathcal{O}_V) = \mathcal{O}_W$ (même preuve que pour $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)

Exemple 4.43* (modifié) Soit $V = \mathbb{P}$ l'espace vectoriel de polynômes.

On considère l'application $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(p) = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p'(1) \end{pmatrix} \quad \text{pour } p \in \mathbb{P}.$$

Alors f est linéaire, vu que

$$\begin{aligned} f(p + \lambda q) &= \begin{pmatrix} \int_0^1 (p(t) + \lambda q(t)) dt \\ (p + \lambda q)'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt + \lambda \int_0^1 q(t) dt \\ (p' + \lambda q')(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 p(t) dt \\ p'(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \int_0^1 q(t) dt \\ q'(1) \end{pmatrix} = f(p) + \lambda f(q), \quad \forall p, q \in \mathbb{P}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Déf. 4.44 | Étant donné une application linéaire $T: V \rightarrow W$ entre deux espaces vectoriels V et W , le noyau de T est

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\} = T^{-1}(\{0_W\})$$

Lemme Fondamental (Lemme 7) | Pour une application linéaire $T: V \rightarrow W$, T est injective si et seulement si $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$.

(Preuve) Si T est injective, comme $T(0_V) = 0_W$, alors pour tout $v \neq 0_V$ on a $T(v) \neq T(0_V) = 0_W$, i.e. $v \notin \text{Ker}(T)$, ce qui nous dit que $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$.
Réciproquement, on suppose $\text{Ker}(T) = \{0_V\}$. Or étant donné $v, v' \in V$ avec $v \neq v'$, il suffit de montrer que $T(v) \neq T(v')$. Si ce n'est pas le cas, i.e. $T(v) = T(v')$, alors $T(v-v') = 0_W$, i.e. $v-v' \in \text{Ker}(T) = \{0_V\}$, ce qui nous dit que $v=v'$. Mais cela est absurde, et donc $T(v) \neq T(v')$. $\square$

Quelques propriétés
(Lemme 8) Pour une application linéaire $T: V \rightarrow W$ entre deux espaces vectoriels, on a que

- $\text{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V ;
- $\text{Img}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

(Lemme 9) Si $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire bijective, alors l'application réciproque $T^{-1}: W \rightarrow V$ est aussi linéaire.

(Preuve) Comme $T(0_V) = 0_W$, on a que $0_V \in \text{Ker}(T)$ et $0_W \in \text{Img}(T)$.
En outre, si $u, v \in \text{Ker}(T)$, i.e. $T(u) = T(v) = 0_W$, alors $u + \lambda v \in \text{Ker}(T)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, vu que $T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v) = 0_W + \lambda \cdot 0_W = 0_W$. En conséquence, $\text{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V . (Exo 2, série 3)

Par ailleurs, si $w, w' \in \text{Img}(T)$, il existe $u, u' \in V$ tels que $w = T(u)$ et $w' = T(u')$, ce qui nous dit que $w + \lambda w' = T(u) + \lambda T(u') = T(u + \lambda u') \in \text{Img}(T)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $\text{Img}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Finalement, si T est linéaire et bijective on voit que T linéaire? $\forall w, w' \in W$
 $T(T^{-1}(w + \lambda w')) = w + \lambda w' = T(T^{-1}(w)) + \lambda T(T^{-1}(w')) = T(T^{-1}(w) + \lambda T^{-1}(w'))$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

L'injectivité de T nous dit alors que
 $T^{-1}(w + \lambda w) = T^{-1}(w) + \lambda T^{-1}(w)$

comme on voulait démontrer

On verra les autres définitions et résultats du Chapitre 4 plus tard $\square$

Chapitre 5 ← Seulement § 5.1 et § 5.5 pour l'instant

§ 5.1 Matrice d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Déf. B Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On définit la matrice

$$[T] = \begin{bmatrix} \underbrace{T(\bar{e}_1)}_{\in \mathbb{R}^m} & \dots & \underbrace{T(\bar{e}_n)}_{\in \mathbb{R}^m} \end{bmatrix}, \text{ où } \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une famille distinguée dans $\mathbb{R}^n$.

est appelée la matrice canonique (ou représentation matricielle canonique) de T .

Thm 5.1 Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors

$$(*) \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

En plus, la matrice $[T]$ est la unique matrice qui satisfait (*), i.e. s'il existe $A \in M(\mathbb{R})_{m \times n}$ telle que $T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors $A = [T]$.

(Preuve) Pour prouver (*) on utilise que

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) = x_1 T(\bar{e}_1) + \dots + x_n T(\bar{e}_n) = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pour l'unicité, on écrit

$$[T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow [T] \cdot \bar{e}_i = A \cdot \bar{e}_i, \quad \forall i \in [1, n]$$

$$\Rightarrow [T] = A \quad \square$$

Chapitres 6 et 7 + § 5.5 Opérations sur les matrices

Déf. C On rappelle que $M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \{ \text{A matrice de taille } m \times n \text{ à coefficients réels} \}$ et qu'on a défini la somme de matrices et le produit d'une matrice avec un scalaire par

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m,1} & \dots & B_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \dots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \dots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} & \dots & \lambda A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m,1} & \dots & \lambda A_{m,n} \end{pmatrix}$$

matrices de la même taille ?

matrices de la même taille ?

Déf. 6.2 Si $A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit le produit de A et B par la matrice $C \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ donnée par

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{i,k} B_{k,j} = A_{i,1} B_{1,j} + A_{i,2} B_{2,j} + \dots + A_{i,m} B_{m,j}$$

pour $i \in [1, p]$ et $j \in [1, n]$.

Exemple 6.3* (modifié)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$A \in M_{3 \times 4}$

$B \in M_{4 \times 2}$

$C \in M_{3 \times 2}$

coefficient de la 2ème ligne et la 1ère colonne de C:

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 7 = 21$$

(RK I) Si B est un vecteur colonne, i.e. $B \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$, alors le produit précédent est précisément le produit d'une matrice avec un vecteur colonne (Déf. 3.1)

Déf 5.21 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, on définit la matrice transposée $A^T \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ par $(A^T)_{ji} = A_{ij}, \forall i \in [1, m], j \in [1, n]$

Exemple 5.22* (modifié)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

on écrit
souvent $M_m(\mathbb{R})$
au lieu de $M_{m \times m}(\mathbb{R})$

Déf 6.7 Étant donné $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$, on dit que A et B commutent si $A \cdot B = B \cdot A$.

matrices carrées de taille m

Exemple 6.6 Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

Déf 6.8 La matrice identité de taille n est la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

↑ sur la diagonale ?
(sinon zéro)

Def. 7.1 Étant donné $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$, on dit que A est invertible s'il existe une matrice $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ telle que $B \cdot A = A \cdot B = I_n$. La matrice B est alors unique (démontrez-le!) et elle est notée A^{-1} .

Quelques propriétés (Proposition 5, p. 98 + Proposition 6, p. 102)

- (i) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), C \in M_{n \times q}(\mathbb{R})$;
- (ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), \forall B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
- (iii) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$, $\forall A, B \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), \forall C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
- (iv) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R}), B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;
- (v) $(A^{-1})^{-1} = A$, $\forall A \in M_m(\mathbb{R})$ invertible;
- (vi) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $\forall A \in M_m(\mathbb{R})$ invertible;
- (vii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $\forall A, B \in M_m(\mathbb{R})$ invertibles.

(viii) $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$
 $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(Preuve) Exercice. $\square$
(voir les notes de Sacha)

Dans cette séance on va voir

- (revoir la dernière page des notes manuscrites précédentes)
- le lien entre composition d'applications linéaires et le produit de matrices;
 - le lien entre la réciprocité d'une application linéaire et l'inverse d'une matrice;
 - déterminant d'une matrice carrée 2×2 et inverse;
 - matrices élémentaires
 - calcul du noyau et de l'image

Lien entre composition et produit (p. 95-96)

Soient $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux applications linéaires. On rappelle que

$$\underbrace{[T]}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}} \right\} m \text{ lignes} \quad \text{et} \quad \underbrace{[S]}_{\in M_{p \times m}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{bmatrix} S(\bar{e}_1) & \dots & S(\bar{e}_m) \end{bmatrix}}_{m \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} S(\bar{e}_1) & \dots & S(\bar{e}_m) \end{bmatrix}} \right\} p \text{ lignes},$$

et

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = [S] \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $\forall y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ (voir Thm 5.1).

Alors $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire et

$$\underbrace{[S \circ T]}_{\in M_{p \times n}(\mathbb{R})} = \underbrace{[S]}_{\in M_{p \times m}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{[T]}_{\in M_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

(Preuve) On voit que

$$[S \circ T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Thm. 5.1 par } S \circ T}{=} (S \circ T) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Thm. 5.1 par } S}{=} S \left(T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \stackrel{\text{Thm. 5.1 par } T}{=} [S] \cdot T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{Thm. 5.1 par } T \text{ et associativité du produit}}{=} [S] \cdot [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. D'après la partie d'unicité du Thm. 5.1. pour $S \circ T$, on conclut que $[S \circ T] = [S] \cdot [T]$.
On laisse au lecteur/à la lectrice la vérification que la composition d'applications linéaires est linéaire. $\square$

SLOGAN: Composition d'app. lin. = Produit de leur matrices canoniques

Une conséquence intéressante

Comme $I_n = [\underbrace{\text{id}_{\mathbb{R}^n}}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{identité}}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, alors, si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective, on a que $[T]$ est inversible et $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.

(Preuve) Comme $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, alors

$$\underbrace{[T] \cdot [T^{-1}]}_{[T \circ T^{-1}]} = \underbrace{[T^{-1}] \cdot [T]}_{[T^{-1} \circ T]} = [\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$$

d'après le fait précédent

ce qui nous dit que $[T]$ est inversible et $[T]^{-1} = [T^{-1}]$. $\square$

Pourquoi calculer des inverses? $\rightarrow$ Cela permet de résoudre certains SEL!

Si $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ est un SEL et A est inversible, alors $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

(Preuve) $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_n} \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, i.e. $\underbrace{I_n \cdot \vec{x}}_{\vec{x}} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ $\square$

7.3. Inversion de matrices carrées de taille 2×2

Thm 7.6 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement si

déterminant $\rightarrow \det(A) := \underbrace{ad - bc} \neq 0$
de A

En plus, si $ad - bc \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
(série 6)

(Preuve) $\Leftarrow$ Si $ad-bc \neq 0$, on pose $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors 21

$$B.A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A.B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous dit que A est inversible et $A^{-1} = B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ On va montrer la propriété

$\det(A.A') = \det(A) \cdot \det(A') \quad , \forall A, A' \in M_2(\mathbb{R})$

En effet, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors $A.A' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$

ce qui nous dit que

$$\begin{aligned} \det(A.A') &= (aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc') \\ &= \cancel{aa'cb'} + aa'dd' + bc'cb' + bc'dd' - \cancel{ab'ca'} - \cancel{ab'dc'} - \cancel{bd'ca'} - \cancel{bd'dc'} \\ &= (ad-bc)(a'd'-b'c') = \det(A) \cdot \det(A'). \end{aligned}$$

Or, si A est inversible, alors $A.A^{-1} = I_2$, ce qui nous dit que

$$1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A) \neq 0. \square$$

Exemple 7.7 | Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ on voit que $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0$ et donc A est inversible. En plus

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

En conséquence, donné le SEL

$$(*) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

on trouve la solution

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 \\ (3/2)b_1 - b_2/2 \end{pmatrix}$$

Calcul du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Noyau Pour calculer $\text{Ker}(T)$ on rappelle que

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x}) = 0 \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : [T] \cdot \bar{x} = 0 \right\}$$

Thm 5.1

i.e.

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \text{Solutions du S.E.L. } [T] \cdot \bar{x} = 0 \right\}.$$

homogène

Exemple (Exercice 5) (Série 4) $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

On voit que

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les sol. de $[T] \cdot \bar{x} = 0$, on calcule la FER de $[T]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[T] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

variables liées variable libre

et

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -6x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \underline{T \text{ n'est pas injective}} \quad (\text{car } \text{Ker}(T) \neq \{0\})$$

Image Pour calculer $\text{Img}(T)$, on rappelle que

$$\text{Img}(T) = \text{Vect} \left\{ T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_n) \right\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Thm. 5.1 $\rightarrow$ 1^{ère} colonne de $[T]$... n^{ème} colonne de $[T]$

$$= \left\{ [T] \cdot \bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En conséquence, T est surjective ssi $[T] \cdot \bar{x} = \bar{b}$ admet une solution, $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$

Exemple (suite) Pour l'application linéaire de l'exemple précédent,

on voit que

$$[[T] | \bar{b}] \xrightarrow{\text{OZEL}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_3' \end{array} \right)$$

ce qui nous dit que

$$[T] \cdot \bar{x} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{pmatrix}$$

un certain vecteur $\bar{b}$ que s'obtient à partir de $\bar{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_4 + b_1' \\ x_2 = -2x_4 + b_2' \\ x_3 = x_4 + b_3' \end{cases}$$

i.e. $[T] \cdot \bar{x} = \bar{b}$ est toujours compatible $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow T$ est surjective $\square$

§ 7.4. Inversion d'une matrice carrée de taille n avec n général

Déf 7.9 Une matrice carrée de taille n est dite élémentaire si elle s'obtient de la matrice identité en effectuant précisément une OEL.

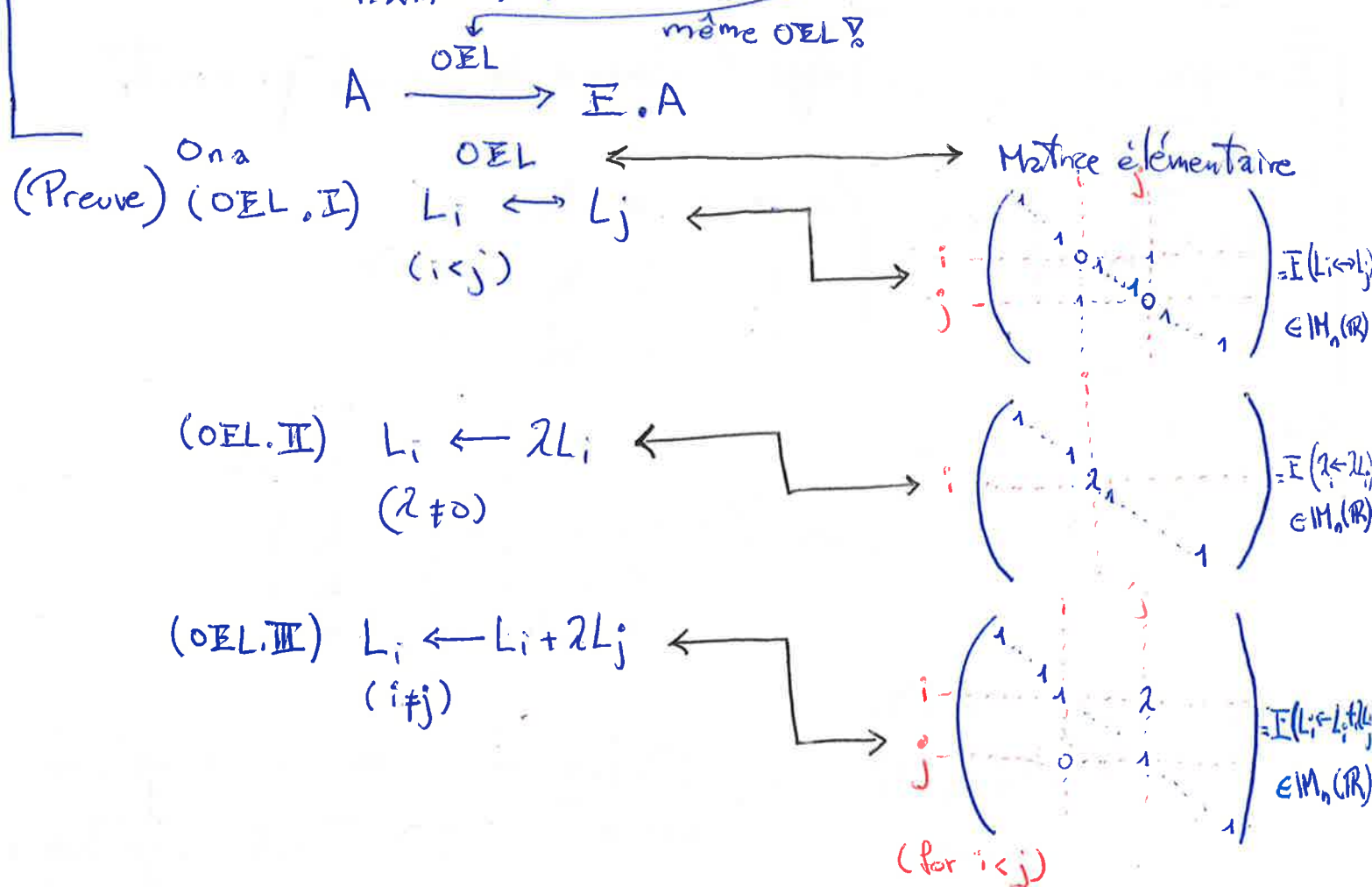
Exemple 7.10* (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} A$.

(ii) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow (-2)L_2} B$.

(iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est élémentaire, car $I_3 \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3} C$.

RK FONDAMENTALE Soit $E \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice

élémentaire qui donne une certaine OEL. Alors, pour toute matrice $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$:



Alors, on voit que

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot A \\ A &\xrightarrow{L_i \leftarrow 2L_i} E(L_i \leftarrow 2L_i) \cdot A \\ A &\xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + 2L_j} E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j) \cdot A \end{aligned}$$

Vérifier le ∇

par définition de produit
matriciel et des matrices $E(?)$.

Par exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E(L_i \leftrightarrow L_j)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j,1} & \dots & A_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \dots & A_{i,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j,1} & \dots & A_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix}$$

- i-ème ligne
- j-ème ligne

□

Dans cette séance, on va voir :

(03.10)

- (revoir les deux pages précédentes des notes manuscrites)
- lien entre matrices élémentaires et matrices inversibles;
- le calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible avec la méthode de Gauss-Jordan; $\leadsto$ exemples aussi ?
- d'autres descriptions de l'inversibilité;

(Corollaire (Lemme 12)) Toute matrice élémentaire est inversible.

(Preuve) En effet,

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_n &\xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot I_n = E(L_i \leftrightarrow L_j) \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot E(L_i \leftrightarrow L_j) \Rightarrow E(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = E(L_i \leftrightarrow L_j) \\ &= I_n \nabla \text{ car } \begin{vmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \end{vmatrix} = \text{id} \\ \bullet \quad I_n &\xrightarrow{L_i \leftarrow 2L_i} E(L_i \leftarrow 2L_i) \cdot I_n = E(L_i \leftarrow 2L_i) \xrightarrow{L_i \leftarrow \frac{1}{2}L_i} E(L_i \leftarrow \frac{1}{2}L_i) E(L_i \leftarrow 2L_i) \Rightarrow E(L_i \leftarrow 2L_i)^{-1} = E(L_i \leftarrow \frac{1}{2}L_i) \\ &= I_n \nabla \text{ car } \begin{vmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow 2L_i} \xrightarrow{L_i \leftarrow \frac{1}{2}L_i} \end{vmatrix} = \text{id} \\ \bullet \quad I_n &\xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + 2L_j} E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j) \cdot I_n = E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j) \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - 2L_j} E(L_i \leftarrow L_i - 2L_j) E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j) \Rightarrow E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j)^{-1} = E(L_i \leftarrow L_i - 2L_j) \\ &= I_n \nabla \text{ car } \begin{vmatrix} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + 2L_j} \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - 2L_j} \end{vmatrix} = \text{id} \end{aligned}$$

Thm. 7.12 | Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, A est inversible ssi il existe des matrices élémentaires $E^{(1)}, \dots, E^{(p)}$ telles que

$$I_n = E^{(p)} \dots E^{(1)} A$$

En particulier, A est inversible ssi A est un produit de matrices élémentaires

voir
"Pourquoi calculer
des inverses?"
avant §7.3?

(Preuve) $\Rightarrow$ Si A est inversible, alors le SEL $A\bar{x} = \bar{b}$ admet une unique solution pour tout $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. En conséquence la FER de $\underbrace{[A : \bar{b}]}_{\substack{\text{n+1 colonnes} \\ \text{lignes}}}$ n'admet aucune variable libre, et donc on a n pivots, à gauche de la ligne pointillée. Cela implique que la FER de $[A : \bar{b}]$ est $[I_n : \bar{b}']$. D'après le thm précédent, il existe des matrices élémentaires $E^{(1)}, \dots, E^{(p)}$ telles que

$$[I_n : \bar{b}'] = E^{(p)} \dots E^{(1)} [A : \bar{b}]$$

ce qui implique $I_n = E^{(p)} \dots E^{(1)} A$.

$\Leftarrow$ L'identité $I_n = E^{(p)} \dots E^{(1)} A$ nous dit que

$$(E^{(1)})^{-1} \dots (E^{(p)})^{-1} I_n = (E^{(1)})^{-1} \underbrace{(E^{(p)})^{-1} E^{(p)}}_{I_n} \dots E^{(1)} A$$

vu que $E^{(p)}, \dots, E^{(1)}$ sont inversibles, i.e.

$$(E^{(1)})^{-1} \dots (E^{(p)})^{-1} = A$$

matrice
élémentaire

matrice
élémentaire

$\Rightarrow$ inversible $\Rightarrow$ produit
est inversible $\Rightarrow A$ inversible

□

Le calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Idee | Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on écrit $[A : I_n]$ et on trouve

la FER respective :

(24)

$$[A | I_n] \rightarrow \underbrace{E^{(n)} \dots E^{(1)}}_{\text{red}} [A | I_n]$$

$$= [E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot A | E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot I_n]$$

$$= [E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot A | E^{(n)} \dots E^{(1)}]$$

Or A inversible si l'on peut trouver $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}$ telles que $E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot A = I_n$
et dans ce cas $\boxed{E^{(n)} \dots E^{(1)} = A^{-1}}$

Conclusion

A inversible ssi la FER de $[A | I_n]$
est $[I_n | \underbrace{B}_{\in M_n(\mathbb{R})}]$.

E_n plus : $\boxed{B = A^{-1}}$!

Exemple 7.1.4 On veut montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible

et calculer A^{-1} . On considère

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}}_A \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ inversible & $L \rightarrow A^{-1}$ □

Thm 7.15* (sans items h) et i)) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les conditions

suivantes sont équivalentes:

- (a) A est inversible;
- (b) A est un produit (fini) de matrices élémentaires;
- (c) la FER de A est I_n ;
- (d) $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, le SEL $A\bar{x} = \bar{b}$ est compatible déterminé;
- (e) le SEL $A\bar{x} = 0$ n'a pas de solution non triviale;
- (f) les colonnes de A forment un ensemble libre;
- (g) les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.

(Preuve) Les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b)$ et $(b) \Leftrightarrow (c)$ ont été déjà démontrées (voir Thm 7.12 et la Conclusion après). L'implication $(a) \Rightarrow (d)$ a déjà été vue (voir "Pourquoi calculer des inverses?" avant §7.3). Pour montrer $(d) \Rightarrow (e)$, on note que $A\bar{x} = 0$ admet toujours la solution triviale $\bar{x} = 0$, avec (d) cela implique qu'il n'y a pas d'autres solutions, ce qui donne (e). En outre, on affirme aussi que $(e) \Leftrightarrow (f)$.

En effet, une solution du SEL

$$\textcircled{1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_n \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n,$$

équivalent à un choix des coefficients $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que 25

$$x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = 0 \quad \leftarrow \text{C.L. qui donne le vecteur nul}$$

ce qui nous dit que

$$\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]}_A \cdot \bar{x} = 0 \} (= \text{Ker}(A)) = \{0\} \iff \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ libre}$$

comme on voulait démontrer (voir Point clé, page 11).

Par ailleurs, (d) $\Rightarrow$ (g). En effet, on a

$$\underbrace{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n$$

ce qui nous dit que, si $A\bar{x} = \bar{b}$ admet une unique solution $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, alors tout $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit comme une C.L. de $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$, i.e. $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ engendre $\mathbb{R}^n$.

Pour montrer l'implication (e) $\Rightarrow$ (c) on remarque que si $A\bar{x} = 0$ admet uniquement la solution triviale, alors la forme échelonnée réduite de A n'a pas de variables libres, i.e. toute colonne de la FER de A possède un pivot. Comme A est une matrice carrée, cela nous dit que la FER de A est I_n , i.e. on vient de voir que (e) $\Rightarrow$ (c). Comme (c) $\Leftrightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (d), on conclut que (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f).

Il reste à montrer que (g) $\Rightarrow$ (d). Il suffit de montrer que (g) $\Rightarrow$ (b). Or, (g) nous dit que le SEL $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ admet une solution (pas forcément unique) pour tout $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Cela nous dit que toute ligne de la FER de A admet un pivot. Comme A est carrée, on conclut que la FER de A est I_n , comme on voulait démontrer. □

Dans cette séance on va voir:

- (i) une simplification dans la définition d'inversibilité de matrices
- (ii) un rappel de la définition du déterminant 2×2 $\rightarrow$ propriétés
- (iii) la définition générale du déterminant $n \times n$ $\rightarrow$ calcul récursif
- (iv) propriétés du déterminant (transposition, OEL, ...)

Corollaire du Thm 7.15* (Proposition 7) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Alors, A est inversible ss'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$,
ss'il existe $C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AC = I_n$
(et dans ce cas $A^{-1} = B = C$).

(Preuve) C'est direct que, si A est inversible, alors il existe les matrices B et C souhaitées, car on prend $B = C = A^{-1}$. S'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $BA = I_n$, alors le SEL $A \cdot \bar{x} = 0$ admet seulement la solution triviale, vu que $\underbrace{B \cdot A}_{I_n} \cdot \bar{x} = B \cdot 0 = 0$, i.e. $\bar{x} = 0$. D'après le Thm 7.15*, A est inversible.

Finalement, s'il existe $C \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AC = I_n$, alors, pour tout $b \in \mathbb{R}^n$ on a que $A(C \cdot b) = I_n \cdot b = b$, ce qui nous dit que les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$. D'après le Thm 7.15*, A est inversible.

En plus, $B = B \cdot I_n = B \cdot A \cdot C = I_n \cdot C = C$
et $B = B \cdot I_n = B \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{-1}$ } nous disent que $A^{-1} = B = C$ $\square$

Chapitre 9 | Déterminant

9.1. Rappel du déterminant 2×2

On rappelle que

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

le Chapitre 8 sera vu plus tard !

Ce sera utile de voir le déterminant comme une fonction des colonnes de la matrice : $\det: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$\det \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

Propriétés (Proposition 8)

- (DET.1) $\det(\bar{a} + \lambda \bar{a}', \bar{b}) = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}', \bar{b})$;
 $\det(\bar{a}, \bar{b} + \lambda \bar{b}') = \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}, \bar{b}')$;
 (DET.2) $\det(\bar{a}, \bar{a}) = 0$;
 (DET.3) $\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1$, où $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $\forall \bar{a}, \bar{a}', \bar{b}, \bar{b}' \in \mathbb{R}^2$
- } multilinéarité
 (bilinearité)
 } alternance
 } normalisation

(Preuve) Pour la première identité de (DET.1), on voit que

$$\begin{aligned} \det(\bar{a} + \lambda \bar{a}', \bar{b}) &= (a_1 + \lambda a'_1) b_2 - b_1 (a_2 + \lambda a'_2) = (a_1 b_2 - b_1 a_2) + \lambda (a'_1 b_2 - b_1 a'_2) \\ &= \det(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda \det(\bar{a}', \bar{b}). \end{aligned}$$

La deuxième identité de (DET.2) se montre de façon analogue.

Pour montrer (DET.2), on note que

$$\det(\bar{a}, \bar{a}) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0,$$

tandis que pour (DET.3) on voit que

$$\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

□

(RK 9.1) (DET.1) + (DET.2) $\Rightarrow \det(\bar{a}, \bar{b}) = -\det(\bar{b}, \bar{a})$

vu que $0 = \det(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) \xrightarrow{\text{(DET.2)}} \det(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a}) + \det(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b}) \xrightarrow{\text{(DET.1)}} \det(\bar{a}, \bar{a}) + \det(\bar{b}, \bar{a}) + \det(\bar{a}, \bar{b}) + \det(\bar{b}, \bar{b})$
 i.e. $\det(\bar{a}, \bar{b}) = -\det(\bar{b}, \bar{a})$. (DET.2) $\Rightarrow 0$ (DET.1) $\Rightarrow 0$ (DET.2) $\Rightarrow 0$ (DET.1) $\Rightarrow 0$ □

§ 9.2. Définition générale du déterminant

Définition 9.2 | Une application $\varphi: \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ^{n facteurs} est dite $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \mapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ est dite

(MUL) multilinéaire si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tous vecteurs $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n \in \mathbb{R}^n$ fixes, l'application

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \longmapsto \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{x}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_n)$$

est linéaire ;

(ALT) alternée si $\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$ dès que deux vecteurs $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$ coïncident pour $i \neq j$;

(NR) normalisée si $\varphi(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = 1$, où $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

RK.9.3 De la même façon que dans la **RK.9.1**,

$$\boxed{\text{MUL}} + \boxed{\text{ALT}} \Rightarrow \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$$

↑ ↑
transposition de $\bar{a}_i$ et $\bar{a}_j$

Définition 9.4 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit la sous-matrice principale $A[i|j] \in M_{(m-1) \times (n-1)}(\mathbb{R})$ comme la matrice obtenue de A en éliminant la ligne i et la colonne j .

Exemple 9.5* Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a $A[1|2] = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

$$A[3|1] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } A[2|3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Thm 9.6 Étant donné $\begin{matrix} n \in \mathbb{N} \\ \text{et} \\ c \in \mathbb{R} \end{matrix}$, il existe une unique application multilinéaire et alternée $\Phi_{n,c} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ facteurs}} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \longmapsto \Phi_{n,c}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

telle que $\Phi_{n,c}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) = c$. L'application $\Phi_{n,1}$ est appelée déterminant et elle est notée $\det$.

Pour $n=1$, $\det = \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et pour $n=2$, $\det\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

En plus, pour $n \geq 2$, $\Phi_{n,1}$ peut être calculée à partir de $\Phi_{n-1,1}$ par l'une quelconque ^{det} des identités suivantes:

Ligne (développement selon l'ième ligne)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{i,k} \cdot \det(A[i|k])$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

pour n'importe quelle ligne / colonne!

Colonne (développement selon la j-ème colonne)

$$\det(A) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+j} a_{l,j} \cdot \det(A[l|j])$$

(Preuve) Omise $\square$

Alors

Thm 9.6 + Déf du det pour $n=2$

Calcul récursif d'un déterminant quelconque

Exemple 9.7

On va calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Par exemple, si on développe selon la 1ère ligne:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -7 & 9 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8)}_{-3} - 2 \cdot \underbrace{(4 \cdot 9 + 6 \cdot 7)}_{78} - 3 \cdot \underbrace{(4 \cdot 8 + 5 \cdot 7)}_{67} \\ &= -3 - 156 - 201 = -360 \end{aligned}$$

Sinon, si on développe selon la 3ème colonne, par exemple,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix} + 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -3 \cdot \underbrace{(4 \cdot 8 + 5 \cdot 7)}_{67} - 6 \cdot \underbrace{(1 \cdot 8 + 2 \cdot 7)}_{22} + 9 \cdot \underbrace{(1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)}_{-3}$$

$$= -201 - 132 - 27 = -360.$$

§ 9.3. Propriétés

Définition 9.8 Si $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$, on définit le déterminant de A via $\det(A) := \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$.

1^{ère} colonne même colonne
↓ ↓

Lemme 13 $\det(A^T) = \det(A), \forall A \in M_n(\mathbb{R})$.

(Preuve) Par récurrence sur $n=2$. Si $n=2$,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \right).$$

On suppose maintenant que $\det(A) = \det(A^T)$ pour des matrices carrées $A \in M_n(\mathbb{R})$. On va montrer que c'est vrai pour $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$. Si l'on développe selon la 1^{ère} colonne, alors

$$\det(A^T) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (A^T)_{j,1} \det(A^T[j|1]) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (A)_{1,j} \det(A[1|j]^T)$$

par hyp. de récurrence $n+1$ $(A^T[j|1]) = A[1|j]^T$ per déf 8

$$= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} (A)_{1,j} \det(A[1|j]) = \det(A). \quad \square$$

Déf 9.12 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$. En plus, on dit que A est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$.

(a₁₁ ... a_{1n})
⋮
(a_{m1} ... a_{mn})

Exemple 9.13

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ est triangulaire sup\u00e9rieure.}$$

Lemme 14

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est triangulaire sup\u00e9rieure, alors

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$$

(Preuve) Pour $n=2$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous dit que $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2}$. On proc\u00e8de par r\u00e9currence. On suppose que le r\u00e9sultat est vrai pour tout $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. On va le montrer pour $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si l'on d\u00e9veloppe selon la 1\u00e8re colonne, alors

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n})$$

matrice triangulaire sup\u00e9rieure $\uparrow$ hypoth\u00e8se de la r\u00e9currence

Proposition 9 | Propri\u00e9t\u00e9s du d\u00e9terminant sous des OEL / OEC

$$(OEC.I) \quad \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n);$$

(MUL) + (ALT)

transposition des colonnes i et j

$$(OEC.II) \quad \det(\bar{a}_1, \dots, \lambda \cdot \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n) \stackrel{(MUL)}{=} \lambda \cdot \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R};$$

$$(OEC.III) \quad \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) \stackrel{(MUL) + (ALT)}{=} \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, j \neq i.$$

(Preuve) Ces identit\u00e9s suivent du Thm 9.6.

Dans cette séance on va voir

- (i) plusieurs exemples de calculs du déterminant, avec des méthodes différentes;
- (ii) une propriété importante sur le déterminant le produit de matrices:
 $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$;
- (iii) lien entre déterminant et inversibilité;

Exemple 9.11*

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 1 & -8 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & 7 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ -7 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \leftarrow (\text{OEC.I})$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \leftarrow (\text{OEC.II})$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ -18 & 4 & -7 & 3 \\ 11 & -2 & 2 & 5 \\ 10 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \leftarrow (\text{OEC.III})$$

comme
 $\det(A)$
 $\det(A^T)$
on peut
faire aussi
des
OEL !

$\underbrace{C_1}_{C_1} \quad \underbrace{C_3}_{C_3} \quad \rightarrow \quad \underbrace{C_1 + 3C_3}_{C_1 + 3C_3}$

Exemple 9.14*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 76 & -21 & 98 & -5 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -6 & 98 \\ 0 & 0 & 32 & 53 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 32 \cdot 0 \cdot 21 = 0$$

Exemple 9.16 | On va calculer

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A

Méthode 1 | On calcule une FE de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

↓ det
det(A)

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 4L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -5 & -8 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2}} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -\frac{1}{12}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 12 \cdot 3 = 72 \checkmark$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Méthode 2 Réduire un peu la matrice et utiliser le Thm 9.6

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

on développe
selon la 2ème
ligne

$$\stackrel{\text{on développe selon la 2ème ligne}}{=} (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} = (-3) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} = (-3) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{on développe selon la 1ère ligne}} = (-3) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 18 \cdot (6 \cdot 2 - 1 \cdot 8) = 18 \cdot 4 = 72 \quad \checkmark$$

Curiosité pour $n=3$ (règle de Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \overset{\text{I}}{a_{11} a_{22} a_{33}} + \overset{\text{II}}{a_{12} a_{23} a_{31}} + \overset{\text{III}}{a_{13} a_{21} a_{32}} - \overset{\text{I}}{a_{13} a_{22} a_{31}} - \overset{\text{II}}{a_{21} a_{32} a_{11}} - \overset{\text{III}}{a_{33} a_{12} a_{21}}$$

§ 9.4. L'identité $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Thm 9.18 | Pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(Preuve) On montre d'abord que

$$(*) \quad \det(E \cdot C) = \det(E) \cdot \det(C), \quad \forall E, C \in M_n(\mathbb{R})$$

avec E élémentaire. En effet,

$$(OEL.I) \quad C \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} C' = E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot C \quad \text{et}$$

$$\det(C') = -\det(C) \quad \& \quad \det(E(L_i \leftrightarrow L_j)) \cdot \det(C) \quad \boxed{30}$$

$\uparrow$
 $(MUL) + (ALT)$

$\uparrow$
 $= -1 \cdot \det(I_n) = -1$
 $\uparrow$
 $(ALT) \text{ ?}$

coincident ✓

(OEL.II) $C \xrightarrow{L_i \leftarrow 2L_i} C' = E(L_i \leftarrow 2L_i) \cdot C$ et

$$\det(C') = 2 \cdot \det(C) \quad \& \quad \det(E(L_i \leftarrow 2L_i)) \cdot \det(C)$$

$\uparrow$
 (MUL)

$\uparrow$
 $= 2 \cdot \det(I_n) = 2$
 $\uparrow$
 (MUL)

coincident ✓

(OEL.III) $C \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + 2L_j} C' = E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j) \cdot C$ et

$$\det(C') = \det(C) \quad \& \quad \det(E(L_i \leftarrow L_i + 2L_j)) \cdot \det(C)$$

$\uparrow$
 $(MUL) + (ALT)$

$\uparrow$
 $= \det(I_n) = 1$
 $\uparrow$
 $(MUL) + (ALT)$

coincident ✓

Cela montre (*) ?

Or, pour le cas général, on écrit

$$A = \underbrace{E^{(p)} \dots E^{(1)}}_{\text{matrices élémentaires}} \cdot \underbrace{\tilde{A}}_{\text{FER de } A}$$

on sait que A inversible
ssi $\tilde{A} = I_n$

En particulier, on conclut que

$$\det(A) = \det(E^{(p)} \dots E^{(1)} \cdot \tilde{A}) \stackrel{(*)}{=} \underbrace{\det(E^{(p)})}_{\neq 0 \text{ ?}} \dots \underbrace{\det(E^{(1)})}_{\neq 0 \text{ ?}} \det(\tilde{A})$$

Comme A est inversible ssi $\tilde{A} = I_n$, on voit que si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$, et de façon réciproque, si A n'est pas inversible, alors la matrice triangulaire supérieure $\tilde{A}$ possède au moins un zéro sur la diagonale, ce qui implique que $\det(\tilde{A}) = 0$, et, en conséquence $\det(A) = 0$. On a démontré que

(A) A inversible $\iff \det(A) \neq 0$.

On finit la preuve du thm.

• Si A est inversible, alors $\tilde{A} = I_n$, ce qui nous dit que

$$\det(A \cdot B) = \det(\underbrace{E^{(1)} \dots E^{(1)} I_n}_{= B})$$

$$\stackrel{(*)}{=} \det(E^{(1)}) \dots \det(E^{(1)}) \cdot \det(B)$$

$$= \det(\underbrace{E^{(1)} \dots E^{(1)}}_A) \cdot \det(B)$$

$$[\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n] = \det(A) \cdot \det(B)$$

• Si A n'est pas inversible, alors AB n'est pas inversible
(vu que $\text{Vect}\{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n\} \subseteq \text{Vect}\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n\} \neq \mathbb{R}^n \nabla$), ce qui nous dit
que, par (A):

$$\det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot \det(B) = \det(A) \det(B). \quad \square$$

Thm 9.19 A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.
(c'est (A) ∇)

Quelques applications

- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible
- $\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(A)$, $\forall P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible

(On dit que A et B dans $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables s'il existe
une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P A P^{-1}$.)

(Preuve) • $I_n = A \cdot A^{-1}$ implique $1 = \det(I_n) = \det(A A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$
ce qui implique $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

$$\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \det(P)^{-1} = \det(A). \quad \square$$

(15.10.2024)

Dans cette séance on va voir

- (i) la formule de Cramer;
 - (ii) le lien entre déterminant et aire/volume;
 - (iii) la définition de base d'un espace vectoriel $\rightarrow$ coordonnées d'un vecteur;
 - (iv) la notion de dimension d'un espace vectoriel;
- } déterminants

⚠ Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\rightarrow$ $A^T = A$ on dit que A est symétrique
 $A^T = -A$ on dit que A est antisymétrique } notions vues dernière fois

§ 9.5. Formule de Cramer

Définition 9.26 | Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ (vecteur colonne) on définit la matrice $A_j(\bar{b}) \in M_n(\mathbb{R})$ obtenue de A en remplaçant la j -ème colonne par $\bar{b}$.

Exemple 9.27 | Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi \\ e \end{pmatrix}$ et $j=2$, on a

$$A_2(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3 \\ 4 & \pi & 6 \\ 7 & e & 9 \end{pmatrix}$$

Proposition 12 (Formule de Cramer) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ l'unique solution de $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ (i.e. $\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$).

Alors $\xrightarrow{j\text{-ème coordonnée de } \bar{x}} x_j = \frac{\det(A_j(\bar{b}))}{\det(A)}$, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$\downarrow$ 1ère colonne $\downarrow$ dernière colonne

(Preuve) On écrit $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$. Alors $A \cdot (I_n)_j(\bar{x}) = A \cdot [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_{j-1} \bar{x} \bar{e}_{j+1} \dots \bar{e}_n] = [A\bar{e}_1 \dots A\bar{e}_{j-1} A\bar{x} A\bar{e}_{j+1} \dots A\bar{e}_n] = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{b} \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_n] = A_j(\bar{b})$

$= [\bar{e}_1 \dots \bar{e}_{j-1} \bar{x} \bar{e}_{j+1} \dots \bar{e}_n]$

ce qui nous dit que $\det(A) \cdot \det((I_n)_j(\bar{x})) = \det(A_j(\bar{b}))$.

$\downarrow$ 1ère colonne $\downarrow$ (j-1)-ème colonne $\downarrow$ (j+1)-ème colonne $\downarrow$ n-ème colonne

Or, si l'on calcule $\det((I_n)_j(\bar{x}))$ en développant la j -ème colonne:

$$\det((I_n)_j(\bar{x})) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} x_k \cdot \det((I_n)_j(\bar{x})[k|j]) = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} x_k \det(I_n[k|j])$$

$= I_n[k|j] \nabla$

Si $k \neq j$, $I_n[k|j]$ contient une colonne et une ligne de zéros, ce qui implique que $\det(I_n[k|j]) = 0$. Si $k = j$, $I_n[k|j] = I_{n-1}$, ce qui implique que $\det(I_n[j|j]) = 1$.
En conséquence, $\det((I_n)_j(\bar{x})) = (-1)^{j+j} x_j \cdot 1 = x_j$ et (*) nous dit

$$x_j = \frac{\det(A_j(b))}{\det(A)}$$

□

Exemple 9.28* Pour le SEL

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

Alors $\det(A) = 24 \neq 0 \Rightarrow A$ inversible. La Proposition 12 nous dit par exemple

que

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \textcolor{red}{5} & 2 & 3 & 4 \\ \textcolor{red}{6} & 2 & 3 & 0 \\ \textcolor{red}{7} & 2 & 0 & 0 \\ \textcolor{red}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{24} = 8.$$

Formule de Cramer pour A^{-1}

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit la matrice complémentaire de A
 ${}^t\text{com } A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $({}^t\text{com } A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A[j|i])$

Thm. 9.29 Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a que

$$A \cdot {}^t\text{com } A = {}^t\text{com } A \cdot A = \det(A) \cdot I_n \xrightarrow[\text{si } A \text{ est inversible}]{\Rightarrow} A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot {}^t\text{com } A.$$

(Preuve) On montrera $A \cdot {}^t\text{com } A = \det(A) \cdot I_n$. L'autre identité est analogue.
 Or dét du produit

$$(A \cdot {}^t\text{com } A)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} ({}^t\text{com } A)_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{j+k} \det(A[k|j])$$

Si $i = k$:

$$(A \cdot {}^t\text{com } A)_{ii} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A[i|j]) \stackrel{\text{Thm. 9.6 (dév. selon } i\text{-ème ligne de } A)}{\downarrow} = \det(A) = \det(A) \cdot (I_n)_{ii}.$$

Si $i \neq k$:

$$(A, {}^t \text{com } A)_{i,k} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} a_{ij} \det(A[k|j]) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-ème} \\ \text{ligne} \\ \leftarrow k\text{-ème} \\ \text{ligne} \end{matrix} = 0 \quad \boxed{32}$$

Thm. 9.6
(dév. selon la
k-ème ligne)

(ALT)
pour det

$$= \det(A) \cdot (\mathbf{I}_n)_{i,k}$$

$= 0 \forall$

Ce qui montre que $A \cdot {}^t \text{com } A = \det(A) \cdot \mathbf{I}_n$. La formule pour A inversible est directe, vu que dans ce cas $\det(A) \neq 0$, et donc $A \cdot (\det(A)^{-1} {}^t \text{com } A) = \mathbf{I}_n$. $\square$

§ 9.6. Interprétation géométrique du déterminant

Thm 9.31 Soient $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires. Alors

$$\text{Aire du parallélogramme défini par } \bar{v} \text{ et } \bar{w} = |\det(\bar{v}, \bar{w})| = |v_1 w_2 - v_2 w_1| \quad \leftarrow \begin{cases} \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \bar{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si $\bar{v}, \bar{w}$ colinéaires, on garde cette égalité en définissant l'aire = 0.

(Preuve) Voir Exercice 9 de la série 6. $\leftarrow$ la preuve est dans le corrigé.

Thm 9.32 Pour $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$, on a que

$$\text{Volume du parallélépipède défini par } \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = |\det(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$$

$\{s\bar{u} + t\bar{v} + r\bar{w} : s, t, r \in [0, 1]\}$

(Preuve) O mise $\square$

Suite du Chapitre 4

nouvelle version!

§ 4.5. Bases

cela inclut le cas d'un sous-espace vectoriel (voir Ex. 9 de la série 3)

Définition 4.28 Soit V un espace vectoriel. Une base de V est une partie $\mathcal{B} \subseteq V$ qui est libre et engendre V .

en général, on fixe un ordre des éléments de $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ et on parle de base ordonnée.

Proposition (p.56) Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base (ordonnée) d'un E.V. V . Alors, pour chaque $v \in V$ il existe des uniques $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. En particulier, si $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_p v_p$, alors $\alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_p = \alpha'_p$.

(Preuve) Comme B engendre V , alors pour tout $v \in V$: il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. On montre l'unicité : si $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = v = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_p v_p$, alors

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + \dots + (\alpha_p - \alpha'_p) v_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 - \alpha'_1 = 0, \dots, \alpha_p - \alpha'_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_p = \alpha'_p. \quad \square$$

$\mathcal{B}$ libre

Définition 4.29 | Soit $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base (ordonnée) d'un E.V. V . Étant donné $v \in V$, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ les uniques scalaires tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$ (d'après la proposition précédente). On appelle $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les coordonnées (ou composantes) de v relatives à la base B . On écrit

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \leftarrow \quad \text{vecteur de coordonnées (ou composantes) de } v \text{ relatives à la base } B.$$

Exemple 4.32 | Pour $V = \mathbb{R}^n$, on pose $B_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Abs B_{can} est une base, appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, $[v]_{B_{\text{can}}} = v \quad \nabla$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $e_1 \quad e_2 \quad e_n$

Exemple 4.33 | Pour $V = \mathbb{R}^2$, on pose $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$. Abs,

B est une base de $\mathbb{R}^2$:

• B est libre :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \begin{cases} -13\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \checkmark$$

• B est partie génératrice de $\mathbb{R}^2$:

$\forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, on veut montrer qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

ie. que le SEL $\begin{cases} 2\alpha_1 - 7\alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_2 \end{cases}$ est compatible. Or, si on fait $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ on trouve le SEL équivalent $\begin{cases} -13\alpha_2 = \beta_1 - 2\beta_2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_2 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{13}L_1} \begin{cases} \alpha_2 = \frac{2\beta_2 - \beta_1}{13} \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = \beta_2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{cases} \alpha_2 = \frac{2\beta_2 - \beta_1}{13} \\ \alpha_1 = \frac{3\beta_1 + 7\beta_2}{13} \end{cases} \quad \checkmark$

En plus

$$\left[\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} \frac{3\beta_1 + 7\beta_2}{13} \\ \frac{2\beta_2 - \beta_1}{13} \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.34 Pour $V = \mathbb{P}_n$, la famille $\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ est une base, appelée base canonique de $\mathbb{P}_n$. Dans ce cas

$$\underbrace{[a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n]}_{\in \mathbb{P}_n} \mathcal{B}_{\text{can}} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Lien entre bases et applications linéaires

Thm 4.46 Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$.

- (i) Si T est injective et $\mathcal{B}$ est libre, alors $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_p)\} \subseteq W$ est libre.
- (ii) Si T est surjective et $\mathcal{B}$ engendre V , alors $T(\mathcal{B}) = \{T(v_1), \dots, T(v_p)\} \subseteq W$ engendre W .

En conséquence, si T est bijective et $\mathcal{B}$ est base de V , alors $T(\mathcal{B})$ est base de W .
Réciproquement, si $T(\mathcal{B})$ est base de W pour une base $\mathcal{B}$ de V , alors T est bijective.

(Preuve) Pour (i), on note que si $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) = 0_W$ pour $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, alors $T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = 0_W$ par linéarité de T . Comme T est injective, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \Rightarrow T(\mathcal{B})$ libre ✓
 $\mathcal{B}$ libre

Pour (ii), on note que, étant donné $w \in W$, comme T est surjective, il existe $v \in V$ tel que $T(v) = w$. Or, comme $\mathcal{B}$ engendre V , il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$. Alors $w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \Rightarrow w \in \text{Vect}\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ pour tout $w \in W$, ce qui nous dit que $T(\mathcal{B})$ engendre W .

Les items (i) et (ii) nous disent que T bijective + $\mathcal{B}$ base $\Rightarrow T(\mathcal{B})$ base.
Pour montrer que, si $T(\mathcal{B})$ est base de W pour $\mathcal{B}$ base de V , alors T est bijective, on procède de la façon suivante. Comme $T(\mathcal{B})$ base de W , $\forall w \in W$ il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tel que $w = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \stackrel{T \text{ lin}}{=} T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) \Rightarrow T$ surjective (car $\forall w \in W, \exists v \in V$ tq $T(v) = w$).
On voit finalement que si $\overset{T \text{ lin}}{T(v)} = 0_W \in W$ pour $v \in V$, on écrit $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$, car $\mathcal{B}$ est base de V , et donc

$$0_W = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 \Rightarrow v = 0_V$$

$\{T(v_1), \dots, T(v_p)\}$ base de W

i.e. T est injective. □

Exemple I Soit V un E.V et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base de V . Alors l'application $T_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$v \mapsto [v]_B$$

est linéaire et bijective. $\leftarrow T_B(B) = B$ car ∇

§ 4.7. Dimension

Lemme 10 Soit $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base d'un E.V. V . Si $\mathcal{F} \subseteq V$ est une famille avec au moins $p+1$ éléments, alors $\mathcal{F}$ est liée.

(Preuve) Soit $T_B: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ l'application linéaire bijective d'exemple précédent. Il suffit de montrer que $T_B(\mathcal{F})$ est liée par le Thm 4.46 (ii). Or, comme $\#(T_B(\mathcal{F})) = \#(\mathcal{F}) > p$, le Thm 3.9 nous dit que $T_B(\mathcal{F})$ est liée, ce qui implique, par le Thm 4.46 (ii), que $\mathcal{F} = T_B^{-1}(T_B(\mathcal{F}))$ est aussi liée. $\square$

Corollaire 2 Si $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $B' = \{v'_1, \dots, v'_q\}$ sont deux bases d'un E.V. V , alors $p = q$.

(Preuve) Si $q > p$, alors B' serait liée $\Rightarrow q \leq p$, car B' est libre.
Si $p > q$, alors B serait liée $\Rightarrow p \leq q$, car B est libre. $\square$

Définition 4.47 Si un espace vectoriel V possède une base $B = \{v_1, \dots, v_p\}$ de cardinalité p , on définit la dimension de V via $\dim(V) = p$.
Par le Corollaire précédent, ce nombre est bien défini. ∇

Exemple 4.32 (suite) $\dim \mathbb{R}^n = n$

Exemple 4.34 (suite) $\dim \mathbb{P}_n = n+1$

Exercice $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (voir Déf. C, feuille 19)
Quelle est $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R})$?

Exemple (semblable aux exercices 7, 9 de la série 7) Méthode de calcul de base de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ [34]

Soit $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'app. lin. associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
on écrit parfois $\text{Ker}(A)$ *on écrit parfois $\text{Im}(A)$*

Calculer une base de $\text{Ker}(T_A)$ et de $\text{Im}(T_A)$. i.e. $A = [T_A]$

Voir Exemple résolu en cours feuille 21

$\text{Ker}(T_A)$ $T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ (SEL)

On calcule alors la FER de A :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A' \text{ FER de } A}$$

A SEL *A' FER de A* *A' SEL*

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -5/4 x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \text{ i.e. } \begin{cases} x_1 = 5x_3/4 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}$$

var. libre

Alors $\text{Ker}(T_A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 5x_3/4 \\ \text{et} \\ x_2 = -3x_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5x_3/4 \\ -3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Nouveau

$\text{Im}(T_A)$ Idee : $T: V \rightarrow W$ Base de T_A !
 $\mathcal{B}_V$ base de $V \Rightarrow T(\mathcal{B}_V)$ famille gén. de $\text{Im}(T)$

Il y a toujours une base $\mathcal{B}' \subseteq T(\mathcal{B}_V)$ (essayer !) ③

Pour ① on choisit $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow T_A(\mathcal{B}_{\text{can}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

famille génératrice de $\text{Im}(T_A)$!

Pour ③ il faut voir quel vecteur on peut éliminer : *colonnes de $[T_A] = A$*

En général faut essayer mais pour matrices : Règle Choisir $\mathcal{B}'$ formé par les colonnes de $T_A(\mathcal{B}_{\text{can}})$ dont la FER contient un pivot

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Extraction d'une base

Dans cette séance on va voir :

(17.10.2024)

(on va finir l'exemple I et la section §4.7)

- (i) lien entre familles libres/génératrices et les bases
- (ii) construction d'applications linéaires
- (iii) la matrice d'une application linéaire relative à deux bases

extraction
et
complétion

Rappel $\mathcal{G} \subseteq V$ est famille génératrice (de V) $\equiv \mathcal{G}$ engendre $V \equiv \text{Vect } \mathcal{G} = V$

Extraction
d'une base à partir
d'une famille génératrice

(Lemme 5, p. 60)

S: $\mathcal{G} = \{w_1, \dots, w_r\}$ engendre un E.V. V ,
et $w_j \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_r\}$, alors $\mathcal{G} \setminus \{w_j\}$ engendre V .

En conséquence, si $\mathcal{G}$ engendre, il existe $\mathcal{B}$ base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

(Preuve) Soit $v \in V$. On va montrer d'abord que $v \in \text{Vect}(\mathcal{G} \setminus \{w_j\})$. Pour le faire, on écrit, pour $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ et $\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$,

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{j-1} w_{j-1} + \alpha_j w_j + \alpha_{j+1} w_{j+1} + \dots + \alpha_r w_r$$

$\uparrow$
car $v \in \text{Vect } \mathcal{G}$

et

$$w_j = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{j-1} w_{j-1} + \beta_{j+1} w_{j+1} + \dots + \beta_r w_r$$

$\uparrow$
car $w_j \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_r\}$

Alors

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{j-1} w_{j-1} + \alpha_j (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_{j-1} w_{j-1} + \beta_{j+1} w_{j+1} + \dots + \beta_r w_r) + \alpha_{j+1} w_{j+1} + \dots + \alpha_r w_r$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 \alpha_j) w_1 + \dots + (\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} \alpha_j) w_{j-1} + (\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} \alpha_j) w_{j+1} + \dots + (\alpha_r + \beta_r \alpha_j) w_r$$
$$\in \text{Vect}(\mathcal{G} \setminus \{w_j\}) = \text{Vect}\{w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_r\} \quad \checkmark$$

Pour montrer le dernier énoncé, on note que, si on répète la première partie, on va arriver à faire des extractions : $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \setminus \{w_j\} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B} (\subseteq \mathcal{G})$ avec $\mathcal{B} = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_s}\}$ dans laquelle aucun vecteur ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres $\Rightarrow \mathcal{B}$ est libre (Thm 2.20) et génératrice $\Rightarrow \mathcal{B}$ base de V . $\square$

Exemple 4.36 Soit $V = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Méthode d'extraction

Pour des SEV de $\mathbb{R}^n$: Règle d'extraction :

① considérer la

matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

et ②

choisir les vecteurs qui correspondent aux colonnes contenant des pivots de la FER

Dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftarrow -L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

colonnes 1 et 2 avec pivots

⇒ $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de V.

Complétion d'une base à partir d'une famille libre

(Thm. 4.53)

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une famille libre dans un E.V. V de dim. n . Alors $p \leq n$ et il existe $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tels que $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base de V .

En particulier, une famille libre de V à dim V éléments est une base de V .
(Preuve) Comme $\mathcal{F}$ est libre, le Lemme 10 nous dit que $p \leq n$. Si $\text{Vect } \mathcal{F} = V$, alors $p = n$ et $\mathcal{F}$ est une base, d'après le Corollaire 2. ✓

Si $\text{Vect } \mathcal{F} \neq V$, il existe $v \in V \setminus \text{Vect } \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F} \cup \{v_{p+1}\} = \{v_1, \dots, v_{p+1}\}$ est libre, par le Thm. 2.20. Si $\text{Vect } \{v_1, \dots, v_{p+1}\} = V$, alors $n = p+1$ et $\{v_1, \dots, v_{p+1}\}$ est base de V . Sinon, on répète cette procédure jusqu'à arriver à $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base de V . □

↳ Pas de "méthode" simple pour compléter une famille libre $\{v_1, \dots, v_p\}$
! Il faut choisir : $v_{p+1} \notin \text{Vect } \{v_1, \dots, v_p\}, v_{p+2} \notin \text{Vect } \{v_1, \dots, v_{p+1}\}, \dots$

Exemple 4.54 La famille $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ est libre, mais n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ (pourquoi?). Pour obtenir un $\bar{v}_3$ pour que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ soit

base de $\mathbb{R}^3$, on écrit un vecteur générique de $\text{Vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{v}_3 \text{ pour } x_1 = x_2 = 1$$

Alors

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathcal{F}_\mathcal{B}}$

on peut choisir
ici n'importe quoi
 $\neq -1$
et $\bar{v}_3 \notin \text{Vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

Résultat fondamental
sur les applications
linéaires

Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une base de V

$\mathcal{F} = \{w_1, \dots, w_p\} \subseteq W$ une famille de W

Alors, il existe une unique application linéaire

$T: V \rightarrow W$ telle que $T(v_i) = w_i, \forall i \in [1, p]$. D'après le Thm 4.46,

T est bijective ssi $\mathcal{F}$ est base de W .

(Preuve) Pour l'existence de T , on définit

$$(*) \quad T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p}_{\substack{\text{élément générique} \\ \text{de } V}}) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p), \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}.$$

Comme $\mathcal{B}$ est base de V , tout élément $v \in V$ s'écrit de façon unique $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.
donc $(*)$ définit une application $T: V \rightarrow W$. Elle est linéaire, car

$$\begin{aligned} T(\underbrace{(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p)}_v + \underbrace{2(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p)}_{2 \cdot w}) &= T((\alpha_1 + 2\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_p + 2\beta_p)v_p) \\ &= (\alpha_1 + 2\beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_p + 2\beta_p)w_p = \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p)}_{=T(v)} + 2 \underbrace{(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p)}_{=T(w)} = T(v) + 2T(w). \checkmark \end{aligned}$$

Pour l'unicité de T , on suppose que $T(v_i) = w_i = T'(v_i)$ avec $T, T': V \rightarrow W$ deux applications linéaires, alors
 $\forall i \in [1, p]$ car T linéaire car T' linéaire

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) \stackrel{!}{=} \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \stackrel{\downarrow}{=} \alpha_1 T'(v_1) + \dots + \alpha_p T'(v_p) \stackrel{\downarrow}{=} T'(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p)$$

ce qui nous dit que $T(v) = T'(v), \forall v \in V = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$.
(un peu difficile)

Exercice Soit $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ -e \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $T(\bar{v}) = \bar{w}$. $\square$

§ 4.8. Matrice d'une application linéaire

36

Soient

- $T: V \rightarrow W$ une application linéaire
- $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V
- $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W

Définition 4.55 Étant donné B, B' et $T: V \rightarrow W$ comme ci-dessus, on définit la matrice de T relative aux bases B et B' (ou la représentation matricielle de T relative aux bases B et B') via

$$[T]_{B' \leftarrow B} := \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{B'} & \dots & [T(v_m)]_{B'} \end{bmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

[RK, J] Si $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, alors

$$[T]_{B_{can} \leftarrow B_{can}} = [T].$$

Propriété fondamentale de la matrice d'une application linéaire

Pour B, B' et $T: V \rightarrow W$ comme ci-dessus, et $v \in V$ on a

$$[T(v)]_{B'} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B.$$

et c'est la seule matrice qui vérifie cette id.

(Preuve) Pour $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ on a $T(v) \stackrel{T \text{ lin}}{=} \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_m T(v_m)$. Or, pour $j \in [1, m]$ on a

$$T(v_j) = \alpha_{1j} w_1 + \dots + \alpha_{nj} w_n \Rightarrow [T(v_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Alors, $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_m T(v_m) = \alpha_1 (\alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{n1} w_n) + \dots + \alpha_m (\alpha_{1m} w_1 + \dots + \alpha_{nm} w_n)$

$$= (\alpha_{11} \alpha_1 + \dots + \alpha_{1m} \alpha_m) w_1 + \dots + (\alpha_{n1} \alpha_1 + \dots + \alpha_{nm} \alpha_m) w_n$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \alpha_1 + \dots + \alpha_{1m} \alpha_m \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \alpha_1 + \dots + \alpha_{nm} \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B \quad \square$$

Exemple 4.56* ($\sim$ Exercice 6 série 9)

Soit $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$. Calculer $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ où

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\mathcal{B}' = \{1, 1-t, (1-t)^2\}$$

$$p \mapsto p'$$

On calcule

$$\bullet T(1) = 0 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bullet T(t) = 1 \Rightarrow [T(t)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1-t) + 0 \cdot (1-t)^2$$

(*)

$$= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1-t) + 0 \cdot (1-t)^2$$

(*)

$$\bullet T(t^2) = 2t \Rightarrow [T(t^2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 - 2 \cdot (1-t) + 0 \cdot (1-t)^2$$

(*)

$$\bullet T(t^3) = 3t^2 \Rightarrow [T(t^3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot 1 - 6 \cdot (1-t) + 3 \cdot (1-t)^2$$

(*)

Alors

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour chaque (*), il faut calculer les coordonnées, pour la dernière par ex.

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1-t) + x_3 \cdot (1-t)^2 = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 3t^2$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

(voir Exemple 4.33) $\uparrow$

Dans cette séance on va voir

- (i) encore des exemples sur la matrice d'une application linéaire
- (ii) le thm du rang
- (iii) la notion de rang d'une app. lin. / matrice
- (iv) la notion d'espace de colonnes / lignes d'une matrice
- (v) la notion de matrice de passage

Exemple 4.57 dim 3 dim 2

Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$T(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$$

dérivée de p

On utilise les bases

- $\mathcal{B}_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$
- $\mathcal{B}'_{\text{can}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$

On veut calculer $[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}$

Par définition

$$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{bmatrix} [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} & [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} \end{bmatrix}$$

On voit que

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car on a la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(t)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$[T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors Test linéaire :

$$\begin{aligned} T(p + \lambda q) &= \begin{pmatrix} (p + \lambda q)(0) \\ (p + \lambda q)'(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(0) + \lambda q(0) \\ (p' + \lambda q')(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) + \lambda q(0) \\ p'(1) + \lambda q'(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q(0) \\ q'(1) \end{pmatrix} = T(p) + \lambda T(q) \end{aligned}$$

On pose maintenant

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$



Calculer ∇
 $[T]_{B' \leftarrow B_{can}}$

Pour cela il faut calculer

$$[T(1)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{car} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$[T(t)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T(t^2)]_{B'} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B' \leftarrow B_{can}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

§ 4.9 + 5.6 . Le Théorème du rang

Thm 4.58 + 5.25 | Soient V, V' deux espaces vectoriels de dim. finies, et $T: V \rightarrow V'$ une application linéaire. Alors

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Img}(T)) = \dim(V) \quad \leftarrow$$

De façon équivalente, Pour une matrice A de taille $m \times n$,
 $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Img}(A)) = n \quad \leftarrow$

$\uparrow$ def $\text{rang de } A$

(Preuve) Soit $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \text{Ker}(T)$ une base.

Si $p=n$, alors $\text{Img}(T) = \{0_{V'}\}$ et donc $\dim(\text{Img}(T)) = 0 \Rightarrow \text{Thm}_{OK} \checkmark$

On suppose désormais $p < n$. Dans ce cas, par le Thm. 4.53 (feuille 35), il existe $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tels que $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ est base de V . On affirme que $B' = \{T(v_{p+1}), \dots, T(v_n)\}$ est une base de $\text{Im}(T)$. En effet,

• B' génératrice: Pour $w \in \text{Im}(T)$, il existe $v \in V$ s.g. $w = T(v)$. Or, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} v_{p+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

car $\{v_1, \dots, v_n\}$ est base de V . Alors

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} v_{p+1} + \dots + \alpha_n v_n) = \underbrace{\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p)}_{= 0_{V'}} + \alpha_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) \\ &= \alpha_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + \alpha_n T(v_n) \quad \checkmark \end{aligned}$$

• B' est libre: Soit $\beta_{p+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta_{p+1} T(v_{p+1}) + \dots + \beta_n T(v_n) = 0_{V'}$$

i.e. $T(\beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n) = 0_{V'} \Rightarrow \beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n \in \text{Ker}(T)$

Alors, il existe $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p$$

car $\{v_1, \dots, v_p\}$ est base de $\text{Ker}(T)$. En conséquence

$$(-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_p) v_p + \beta_{p+1} v_{p+1} + \dots + \beta_n v_n = 0_V \Rightarrow \begin{aligned} &-\beta_1 = \dots = -\beta_p = 0 \\ &\text{et} \\ &\boxed{\beta_{p+1} = \dots = \beta_n = 0} \quad \checkmark \end{aligned}$$

car $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ est libre.

On conclut que

$$\left. \begin{aligned} \dim(\text{Ker}(T)) &= p \text{ [hyp]} \\ \dim(\text{Im}(T)) &= n - p \\ \dim(V) &= n \text{ [hyp]} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \\ &= p + (n - p) = n \\ &= \dim(V) \quad \checkmark \square \end{aligned}$$

(Rappel)

Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

Notation

$$\text{Im}g(A) := \text{Im}g(T_A)$$

$$\text{Ker}(A) := \text{Ker}(T_A)$$

$$\begin{aligned} \text{où } T_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \bar{v} &\mapsto A \cdot \bar{v} \end{aligned}$$

En plus, on écrit aussi

$$\text{Col}(A) := \text{Vect}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\text{Lgn}(A) := \text{Vect}\{\underbrace{\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_m}_{\text{colonnes de } A}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{lignes de } A}$

Fait

Par définition

$$\text{Col}(A) = \text{Im}g(A) \quad \nabla$$

(Rappel)

Base de $\text{Col}(A) = \text{Im}g(A)$

$$\textcircled{1} A \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{A} \leftarrow \text{FER de } A$$

$[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \quad [\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n]$

$\textcircled{2}$ les numéros des colonnes de $\tilde{A}$ avec des pivots: $\tilde{a}_{i_1}, \dots, \tilde{a}_{i_r}$

on les appelle
"colonne-pivot"

$\{\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_r}\}$ base de $\text{Col}(A)$

Fait

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A}) \text{ si } \tilde{A} \text{ est FER de } A?$$

(Lemme 11)
(et Cor. 4)
(Preuve)

Comme $\tilde{A}$ peut s'obtenir de A en faisant des OEL, on voit que $\text{Lgn}(\tilde{A}) \subseteq \text{Lgn}(A)$. De la même façon, A peut s'obtenir de $\tilde{A}$ en faisant des OEL, les réciproques de celles considérées avant.

En conséquence $\text{Lgn}(A) \subseteq \text{Lgn}(\tilde{A})$. Cela nous dit que $\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(\tilde{A})$. □

Thm. 531 | Pour une matrice A

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$$

(Preuve) Soit $\tilde{A}$ la FER de A . Le nombre de colonnes-pivot de $\tilde{A}$ est égal au nombre de lignes non nulles de $\tilde{A}$. Alors

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) &= \#\{\text{colonnes-pivot de } A\} = \#\{\text{colonnes-pivot de } \tilde{A}\} \\ &= \#\{\text{lignes non-nulles de } \tilde{A}\} = \dim(\text{Lgn}(\tilde{A})) = \dim(\text{Lgn}(A)) \\ &= \dim(\text{Col}(A^T)) = \text{rang}(A^T) \end{aligned}$$

□

Chapitre 8 | La matrice de passage/changement de base.

Définition

(voir Thm. 8.2 et p. 119)

Soient $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ et $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\}$ deux bases d'un espace vectoriel V . On définit la

matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ (parfois : matrice de changement de base)

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} := [\text{id}_V]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \quad \text{i.e.} \quad P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [v_1]_{\mathcal{C}} & \dots & [v_p]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ matrice de l'application linéaire identité de V en V

Propriété fondamentale
de la matrice de passage

Pour $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\}$ des bases d'un espace vectoriel V , on a

$$[v]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \quad \text{pour tout } v \in V.$$

et c'est l'unique matrice qui satisfait à cette id. 8.

(Preuve) C'est une conséquence de la propriété fondamentale de la matrice d'une application linéaire. $\square$

Propriétés • $P_{B \leftarrow B} \cdot P_{B \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B}$ pour trois bases B, B', B'' d'un espace de dim n
 • $P_{B \leftarrow B}$ est inversible et $P_{B \leftarrow B}^{-1} = P_{B \leftarrow B}$.

(Preuve). $[v]_B = P_{B \leftarrow B} [v]_B$ et $[v]_B = P_{B \leftarrow B'} [v]_{B'} = P_{B \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} [v]_B$
 $\Rightarrow P_{B \leftarrow B} [v]_B = P_{B \leftarrow B'} P_{B' \leftarrow B} [v]_B = [v]_B \Rightarrow P_{B \leftarrow B'} \cdot P_{B' \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B}$
 • On voit que $P_{B \leftarrow B} = I_n$ et $P_{B \leftarrow B} = I_n$, ce qui nous dit que

$P_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B} = I_n$ et $P_{B \leftarrow B} P_{B \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B} = I_n$
 $\Rightarrow P_{B \leftarrow B}$ inversible et $P_{B \leftarrow B}^{-1} = P_{B \leftarrow B}$. $\square$

Exemple 8.4 • $B = B_{can} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ ← une matrice canonique
 • $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Il y a une matrice de passage simple:

$$P_{B_{can} \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas il y a une matrice de passage "facile" !!

les vecteurs de B mis sous forme de colonne pour former la matrice

car

$$P_{B_{can} \leftarrow B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{B_{can}} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_{can}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour calculer l'autre matrice de passage

$$P_{B \leftarrow B_{can}} = P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir

- (i) (voir la matrice de passage sur la feuille 39)
- (ii) des propriétés des matrices des applications linéaires et matrices de passage
- (iii) la formule de changement de base
- (iv) exemples !

Rappel

Propriétés
fondamentales
de matrices
des 2 pp. linéar.
des matrices de
passage

Pour $T: V \rightarrow V'$ app. lin, $\mathcal{B}$ base de V , $\mathcal{B}'$ base de V'
($\dim V = n, \dim V' = m$), alors $\mathcal{E}$ base de V

$$\boxed{\text{Id}_{\mathbb{R}^1}} [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$$

$\in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^m$

$$\boxed{\text{Id}_{\mathbb{R}^2}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{E}}$$

$\in M_n(\mathbb{R})$ $\in \mathbb{R}^n$ $\in \mathbb{R}^n$

et c'est
l'unique
matrice qui satis-
fait
pour tout
 $v \in V$,
et c'est l'unique
matrice qui
satisfait à sa pp.

Conséquences

① Si $T: V \rightarrow V'$, $S: V' \rightarrow V''$, $\mathcal{B}$ base de V , $\mathcal{B}'$ base de V' ,
 $\mathcal{B}''$ base de V''
alors

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$$

② $[\text{id}_V]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = I_{\dim(V)}$

③ T bijective ssi $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est matrice inversible

Dans ce cas, $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$

④ Pour $v \in V$

$$v \in \text{Ker}(T) \iff [v]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker}([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$$

En particulier,

$$T \text{ injective} \iff [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \text{ injective}$$

⑤ Pour $v' \in V'$,

$$v' \in \text{Im}(\tau) \iff [v']_{B'} \in \text{Im}([\tau]_{B' \leftarrow B})$$

En particulier,

$$\tau \text{ surjective} \iff [\tau]_{B' \leftarrow B} \text{ surjective.}$$

(Preuve) Pour ①, on note que

$$[S \circ \tau]_{B'' \leftarrow B} [v]_B = [(S \circ \tau)(v)]_{B''} = [S(\tau(v))]_{B''} = [S]_{B'' \leftarrow B'} [\tau(v)]_{B'} \\ \stackrel{\text{par } [Id_{V'}]}{=} [S]_{B'' \leftarrow B'} [\tau]_{B' \leftarrow B} [v]_B, \forall v \in V$$

donc, par unicité, $[S \circ \tau]_{B'' \leftarrow B} = [S]_{B'' \leftarrow B'} [\tau]_{B' \leftarrow B}$.

Pour ②, $[id_V]_{B \leftarrow B} [v]_B \stackrel{[Id_V]}{=} [id_V(v)]_B = [v]_B = I_{\dim(V)} [v]_B, \forall v \in V$,

donc, par unicité $[id_V]_{B \leftarrow B} = I_{\dim(V)}$.

Pour ④,

$$v \in \text{Ker}(\tau) \iff \tau(v) = 0_{V'} \iff [\tau(v)]_{B'} = 0 \iff [\tau]_{B' \leftarrow B} [v]_B = 0 \\ \iff [v]_B \in \text{Ker}([\tau]_{B' \leftarrow B})$$

Abs.

$$\tau \text{ inj} \iff \text{Ker}(\tau) = \{0_V\} \iff \text{Ker}([\tau]_{B' \leftarrow B}) = \{0\} \\ \iff [\tau]_{B' \leftarrow B} \text{ inj.}$$

Pour ⑤,

$$v' \in \text{Im}(\tau) \iff \exists v \in V \text{ t.q. } \tau(v) = v' \iff \exists v \in V \text{ t.q. } [\tau(v)]_{B'} = [v']_{B'} \\ \stackrel{[Id_{V'}]}{\iff} \exists v \in V \text{ t.q. } [\tau]_{B' \leftarrow B} [v]_B = [v']_{B'} \\ \iff \exists \bar{\pi} \in \mathbb{R}^{\dim(V)} \text{ t.q. } [\tau]_{B' \leftarrow B} \cdot \bar{\pi} = [v']_{B'} \\ \stackrel{[Id_V]}{\iff} [v]_B \in \text{Im}([\tau]_{B' \leftarrow B})$$

Abs

$$\tau \text{ surj} \iff [\tau]_{B' \leftarrow B} \text{ surj, vu que } [Id_{V'}]_{B' \leftarrow B'} \text{ est bij.}$$

Pour ③, on utilise qe ④ et ⑤ nous disent que

41

$$T \text{ bij} \Leftrightarrow T \text{ inj et surj} \Leftrightarrow [T]_{B' \leftarrow B} \text{ inj et surj} \Leftrightarrow [T]_{B' \leftarrow B} \text{ inversible}$$

En plus, dans ce cas, $T^{-1} \circ T = \text{id}_V$ et $T \circ T^{-1} = \text{id}_{V'}$ nous disent que

$$[T^{-1} \circ T]_{B \leftarrow B} = [\text{id}_V]_B \Rightarrow [T^{-1}]_{B \leftarrow B'} \cdot [T]_{B' \leftarrow B} = I_{\dim(V)}$$

$$[T \circ T^{-1}]_{B' \leftarrow B'} = [\text{id}_{V'}]_{B'} \Rightarrow [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [T^{-1}]_{B \leftarrow B'} = I_{\dim(V')}$$

Comme $T \text{ bij}$, $\dim(V) = \dim(V')$ et $[T^{-1}]_{B \leftarrow B'} = [T]_{B' \leftarrow B}^{-1} \cdot \square$

Exemple Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $B'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$ $B_{\text{can}} = \{1, t, t^2\}$

On a calculé $[T]_{B'_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $[T]_{B'_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}}$ admet un pivot par ligne (elle est échelonnée réduite déjà), elle est surjective $\Rightarrow T$ surjective.
 (conséquence ⑤)

On va calculer $\text{Ker}(T)$.

D'après la conséquence ④,

$$p \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow [p]_{B_{\text{can}}} \in \text{Ker}([T]_{B'_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}})$$

i.e

$$p = at^2 + bt + c \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow [p]_{B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 1

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{pmatrix} c \\ b+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\underset{at^2+bt+c}{p \in \text{Ker}(\tau)} \iff p = at^2+bt \text{ avec } b+2a=0$$

$$\iff p = at^2 - 2at = at(t-2)$$

En conséquence

$$\text{Ker}(\tau) = \{ at^2 - 2at : a \in \mathbb{R} \}$$

Sinon, une autre façon:

① On calcule $\text{Ker}([\tau]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$:

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

var liées

↑
var. libre

on écrit
les var
liées en
fonction des
var libres

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

② On traduit les vecteurs de $\text{Ker}([\tau]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ en éléments de V :

pour chaque $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}([\tau]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$ (resp. él. de la base) $\rightsquigarrow$ on obtient (resp. un él. de la base) $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in \text{Ker}(\tau)$ si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

Alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 0 \cdot 1 + (-2) \cdot t + 1 \cdot t^2 \in \text{Ker}(\tau) \Rightarrow \text{Ker}(\tau) = \text{Vect} \{ t^2 - 2t \}.$$

§8.3 Formule de changement de base

142

Changement de base

Soient $T: V \rightarrow V'$ app. lin, $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ bases de V
 $\mathcal{B}', \mathcal{E}'$ bases de V'
 Alors

$$[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$$

(Preuve) La conséquence ① nous dit

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} &= [\text{id}_{V'} \circ T \circ \text{id}_V]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = [\text{id}_{V'}]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} [\text{id}_V]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{B}'} [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}. \quad \square \end{aligned}$$

Cas particulier
 $(V=V', \mathcal{B}=\mathcal{B}' \text{ et } \mathcal{E}=\mathcal{E}')$

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} &= P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} \\ &= P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}^{-1} [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} \end{aligned}$$

Notation

On écrit $[T]_{\mathcal{B}}$ au lieu de $[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$ en général.

Exemple 8.6 (*) (notation différente)

Soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_2 - 5x_3 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

Soient $\mathcal{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{B}'_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Alors $[T] = [T]_{\mathcal{B}'_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}}$

$$\text{car } T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{app. lin} \\ \text{(ero)} \end{matrix}$$

Soient $\bar{c}_1$ $\bar{c}_2$ $\bar{c}_3$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathcal{E}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

base de $\mathbb{R}^3$ (exo) base de $\mathbb{R}^2$ (exo)

On veut calculer

$$[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} \stackrel{?}{=} \underbrace{P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}}}_{\text{formule de changement de base}} \underbrace{[T]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}}_{\text{(déjà calculée)}} \underbrace{P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}}}_{\text{facile!}}$$

car toujours de base

$$P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comment calculer $P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$?

① $P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}'} = [\bar{c}_1' \ \bar{c}_2'] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
 et
 ② $P_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = P_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{E}'}^{-1}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Alors

$$[T]_{\mathcal{E}' \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 13/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette séance on va voir

43

(i) on va voir la formule de changement de base (voir feuille 42)

(ii) exemples de changement de base

05.11

matrice⁺ d'applications linéaires

(iii) la notion de valeur et vecteur propre

Exemple 8.5*

Soient $B_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ deux bases de $\mathbb{R}^3$

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On veut calculer d'abord calculer

$$[\vec{v}]_{B_{can}} \quad \text{et} \quad [\vec{v}]_B$$

D'abord:

$\nwarrow$ toujours vrai

$$[\vec{v}]_{B_{can}} = \vec{v} \Rightarrow [\vec{v}]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour calculer $[\vec{v}]_B$:

Méthode 1 Résoudre un SEL

Par définition

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \nabla$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$

En conséquence, $x_2 = 1, x_3 = 1$ et $x_1 = 4$ ✓

$$\boxed{[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nabla}$$

Méthode 2 | On sait

$$P_{B_{\text{can}} \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

toute matrice
de passage
 $B_{\text{can}} \leftarrow B$
de $\mathbb{R}^n$ est comme
s2 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Il faut calculer

$$P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} = P_{B_{\text{can}} \leftarrow B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Or

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \nabla_0$$

Alors

$$P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme

$$\boxed{[\vec{v}]_B = P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} [\vec{v}]_{B_{\text{can}}}} \quad (\text{identité fondamentale})$$

on a que

$$[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Soit

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

donnée par

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Calculer $[T]$ et $[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$.

D'abord

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{B}_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$$

c'est toujours vrai pour des app $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Pour calculer $[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}$:

Méthode 1 | Par définition

$$[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} := \left[[T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \quad [T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \quad [T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \right]$$

Il faut calculer $\downarrow$ déjà fait ?

$$[T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[.]_{\mathcal{B}}$ est zpp lin ?

$$[T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \stackrel{\downarrow}{=} 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$[T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 2

Formule de changement de base :

$$[T]_{B \leftarrow B} = P_{B \leftarrow B_{\text{can}}} [T]_{B_{\text{can}} \leftarrow B_{\text{can}}} P_{B_{\text{can}} \leftarrow B}$$

Dans ce cas

déjà calculés ☺☺

$$\begin{aligned} [T]_{B \leftarrow B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

On va calculer

$$[T]_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{méthode 1}}}{=} \begin{bmatrix} [T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} & [T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} & [T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Matrice} \\ \text{diagonale!} \end{array}$$

$$[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Noter que

45

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla$$

Def. 10.2 Soit $T: V \rightarrow V$ / $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une app. lin / matrice.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T/A s'il existe $v \in V$ / $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que

$$T(v) = \lambda \cdot v \quad / \quad A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}$$

On dit que $v/\bar{v}$ est un vecteur propre de T/A associé à λ .

$\triangle$ L'exemple précédent nous dit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda = 6$.

De même, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de T associés à la valeur propre $\lambda = 0$.

RK Si v est un vecteur propre de $T: V \rightarrow V$, alors c.v. aussi pour tout $c \in \mathbb{R}$ non nul, avec la même valeur propre ∇ (de même pour les matrices A et leurs vecteurs et valeurs propres).

Dans cette séance on va voir

07.11

- (i) notion de vecteur et valeur propre $\leftarrow$ voir feuille 45)
- (ii) exemples de vecteurs et valeurs propres.
- (iii) notion d'espace propre
- (iv) notion de polynôme caractéristique
- (v) plus d'exemples $\leftarrow$ comment calculer valeurs et vecteurs propres

Chapitre 10 Valeurs et vecteurs propres

Idee des valeurs propres / vecteurs propres

Une homothétie est une application $H: V \rightarrow V$, pour V un $\mathbb{R}$ -V.
qui associe $\lambda \cdot v$ à $v \Rightarrow$ toute homothétie est une app. lin.
 $\uparrow$ rapport de l'homothétie

Informel

Un vecteur propre de T détermine une direction de V pour laquelle T se comporte comme une homothétie de rapport λ donnée par la valeur propre associée.

Exemple 10.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

• Si $\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ on voit que

$$A \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4 \cdot \bar{v}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ est vecteur propre avec valeur propre -4 .

• Si $\bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a

$$A \cdot \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre de A .

"Meilleur" exemple possible | Exemple 10.4

Si $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ est diagonale

on écrit parfois
 $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$

alors $A \cdot \bar{e}_i = d_i \cdot \bar{e}_i, \forall i=1, \dots, n \Rightarrow \bar{e}_i$ est vecteur propre de A de valeur propre d_i !

On voudrait une base formée de vecteurs propres ...

Première observation : on peut avoir plusieurs vecteurs propres pour la même valeur propre et qui forment un ensemble libre. !

Définition 10.8 | Soit $T: V \rightarrow V$ / $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une app. lin / matrice.
Soit λ une valeur propre de T/A . On définit l'espace propre associé à $\lambda \in \mathbb{R}$:
 $E_\lambda := \{v \in V : T(v) = \lambda v\} \subseteq V$ / $E_\lambda := \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \bar{v} = \lambda \bar{v}\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Δ Si $v \in V$ est vecteur propre de T avec valeur propre λ , alors $v \in E_\lambda$.

Si $v \in E_\lambda$ et $v \neq 0_V$, alors cest un vecteur propre de T avec valeur propre λ .

Si $\dim(E_\lambda) = 1$, alors

$$E_\lambda = \text{Vect}\{v\}$$

$\uparrow$
vecteur propre de valeur propre λ
 $\Delta \quad \Delta \quad \Delta$
 $0 \quad 0 \quad 0$

Mais comment calculer les espaces propres???

(On va travailler désormais avec des matrices pour simplifier)
 $\uparrow$ L'général

Point fondamental
Lemme 15

$$E_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \cdot \text{id}_V) \leftarrow \text{par } T: V \rightarrow V \text{ app. lin}$$

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \leftarrow \text{pour } A \in M_n(\mathbb{R})$$

(Preuve) On fait la preuve pour matrices $\leftarrow$ le cas des app. lin est pareil.

$$\bar{v} \in E_\lambda \iff A \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v} \iff A \bar{v} - \lambda \bar{v} = 0$$

$\Downarrow$

$$\iff (A - \lambda \cdot I_n) \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{v} \in \text{Ker}(A - \lambda I_n). \square$$

Critère pour calculer des valeurs propres:

Thm. 10.14 | Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$;

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$$

(Preuve) λ est valeur propre de $A \iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

$$\iff A - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inj} \iff A - \lambda \cdot I_n \text{ n'est pas inv}$$

$$\iff \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0 \quad \square$$

Exemple 10.3 (suite) + 10.15 Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, on calcule

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28 = (\lambda + 4)(\lambda - 7)$$

polynôme de degré
 $n=2$ ∇ ∇

↙ On va toujours avoir un polynôme de degré n

Définition 10.16 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le polynôme

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

est le polynôme caractéristique de A .

Si l'on met le Thm 10.14 avec la définition précédente:

① Valeurs propres de A = racines du polynôme caractéristique
 $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

tandis que le Lemme 15 nous dit que

② Espace propre E_λ associé à valeur propre λ = $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$

(on calcule en général une base de E_λ ∇)

Exemple 10.20 On veut les valeurs propres et espaces propres

de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

① Calculer $P_A(\lambda)$ et les racines

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

dév. 1ère
colonne

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 1] + [2 - 1 - 1] - [1 + 1 - \lambda]$$

$$= (1-\lambda) [-2\lambda + \lambda^2] + 2(\lambda - 2) = (1-\lambda) \cdot 2(\lambda - 2) + 2(\lambda - 2)$$

$$= (\lambda - 2) \cdot [\lambda - \lambda^2 + 2] = (\lambda - 2) \cdot [-(\lambda - 2)(\lambda + 1)]$$

$$= -(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)^2$$

Hence: valeurs propres $\lambda = -1$ et $\lambda = 2$
de A

② Calculer les espaces propres

$$\bullet \boxed{\lambda = -1} \Rightarrow E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

48

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{-1} &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

↑ à scalaire près "un seul" vecteur propre !!!

$$\bullet \boxed{2=2} \Rightarrow \mathbb{F}_2 = \text{Ker}(A - 2 \cdot \mathbb{I}_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

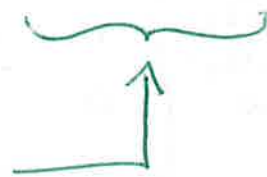
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathbb{F}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2 - x_3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

deux vecteurs propres
non colinéaires



Dans cette séance on va :

- (i) faire l'exemple 10.20 (voir feuilles 47 et 48) 12.11
- (ii) voir la notion de multiplicité algébrique et géométrique
- (iii) plus d'exemples

Exemple / activité Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

On veut calculer les valeurs propres et les espaces propres associés

① Pour valeurs propres $\rightarrow$ On calcule $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

① dans ce cas

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda) \cdot [(-2-\lambda)(5-\lambda) + 10] + 2 \cdot [4 \cdot (5-\lambda) - 8] \\ &\quad + 1 \cdot [-20 + 4 \cdot (2+\lambda)] \end{aligned}$$

$$= (4-2) \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -4\lambda + 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda - 12 \end{bmatrix}$$

$$= 2(\lambda-3)(4-\lambda) - (4\lambda-12) = 2(\lambda-3)(4-\lambda) - 4(\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3)(-\lambda^2+4\lambda-4) = -(\lambda-3)(\lambda-2)^2$$

S'il on avait fait ?

$$-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda - (4\lambda - 12) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12$$

Comment calculer les racines ??

Critère de Gauss

Les racines dans $\mathbb{Q}$ d'un polynôme $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$) sont entières et diviseurs de a_0

si ces racines existent

Dans ce cas on essaie avec les diviseurs de 12 :

$$\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12 \}$$

Dès que l'on a une racine (si l'on a la chance), par exemple $\lambda = 2$, on divise $P_A(\lambda)$ par $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{r} -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \\ -\lambda^3 + 2\lambda^2 \\ \hline \end{array}$$

$$-5\lambda^2 - 16\lambda$$

$$-5\lambda^2 - 10\lambda$$

$$-6\lambda + 12$$

$$-6\lambda + 12$$

$$0$$

$$\begin{array}{r} \lambda - 2 \\ -\lambda^2 + 5\lambda - 6 \end{array}$$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$
et on applique formule usuelle pour les racines de $-\lambda^2 + 5\lambda - 6$:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 2)[-(\lambda - 2)(\lambda - 3)]$$

Alors les valeurs propres de A sont : $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$

Définition 10.24 | Soit $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si λ_K est une valeur propre de A

(= racine de $P_A(\lambda)$), on dit que la multiplicité algébrique de λ_k est m_k (entier positif) si $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ divise $P_A(\lambda)$ mais $(\lambda - \lambda_k)^{m_k+1}$ ne divise pas $P_A(\lambda)$, i.e. m_k est le plus grand entier positif tel que $(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ divise $P_A(\lambda)$. | Notation: $m_k = \text{mult}_A(\lambda_k)$

Exemple : Dans l'exemple vu $\lambda=2$ a multiplicité 2,
 (suite) $\lambda=3$ a multiplicité 1.

② Pour les espaces propres $\rightarrow$ On calcule $\underline{E}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$

② $\lambda=2$

$$\underline{E}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① Donc var. libre

$$\underline{E}_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

⑥ $\overline{\mathbb{F}_3} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

50

On calcule la FIER

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & -5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\overline{\mathbb{F}_3} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overbrace{0}^{\text{var libre}} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pour toute valeur propre λ_0

Fait $\dim \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n) \leq \text{multiplicité algébrique de } \lambda_0$
 $\text{mult}_A(\lambda_0)$

(Thm 10.30)

(Preuve) Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $\mathbb{F}_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n)$.

On peut compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

Ainsi, si $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'app. lin. $T_A(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$, on a que

$$A' := [T_A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(v_k)]_{\mathcal{B}} & [T(v_{k+1})]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(v_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 & \mathcal{B} \\ \hline 0 & \mathcal{C} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \lambda_0 & \mathcal{B} \\ \hline 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}} \right\}_{k = \dim(\mathbb{F}_{\lambda_0})}$$

$$\left. \vphantom{\begin{pmatrix} \lambda_0 & \mathcal{B} \\ \hline 0 & \mathcal{C} \end{pmatrix}} \right\}_{n-k}$$

Comme

$$A' = P_{B \leftarrow B_{can}} \cdot \overset{P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1}}{[A]} \cdot P_{B_{can} \leftarrow B}$$

$$\Rightarrow A' - \lambda \cdot I_n = \overset{P_{B \leftarrow B_{can}}}{P_{B \leftarrow B_{can}}} \overset{P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1}}{A} \overset{P_{B_{can} \leftarrow B}}{P_{B_{can} \leftarrow B}} - \overset{P_{B \leftarrow B_{can}}}{P_{B \leftarrow B_{can}}} \overset{P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1}}{\lambda I_n} \overset{P_{B_{can} \leftarrow B}}{P_{B_{can} \leftarrow B}}$$

$$= \overset{P_{B \leftarrow B_{can}}}{P_{B \leftarrow B_{can}}} (A - \lambda I_n) \overset{P_{B_{can} \leftarrow B}}{P_{B_{can} \leftarrow B}}$$

$$\Rightarrow \det(A' - \lambda I_n) = \det(P_{B_{can} \leftarrow B}^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I_n)$$

$$\cdot \det(P_{B_{can} \leftarrow B})$$

$$= \det(P_{B_{can} \leftarrow B})^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \det(P_{B_{can} \leftarrow B})$$

i.e. $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$

Or

$$P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda I_n) = \det \left(\begin{array}{c|c} \overset{n}{\lambda_0 - \lambda} & B \\ \hline \mathcal{O} & \overset{n-k}{C - \lambda I_{n-k}} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} k = \dim(E_{\lambda_0}) \\ n-k \end{array} \right\}$$

$$= (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot \det(C - \lambda \cdot I_{n-k})$$

$$\Rightarrow (\lambda_0 - \lambda)^k \mid P_A(\lambda) \Rightarrow \dim(E_{\lambda_0} = k \leq \text{mult}_A(\lambda_0). \quad \square$$

Au fait, dans (*) on a montré aussi:

THM 10.21 Si: $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (i.e. A et A' sont
avec $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible semblables)

alors $P_{A'}(\lambda) = P_A(\lambda)$.

Définition 10.28 Pour λ une valeur propre de A , on définit la multiplicité géométrique de λ comme $\dim E_\lambda = \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$. Notation: $\text{mult}_A(\lambda) := \dim E_\lambda$.

Dans cette séance on va voir

(i) exemple $\leftarrow$ application et lien avec matrices de passage ^{14 11}

Un modèle de "population" simplifié

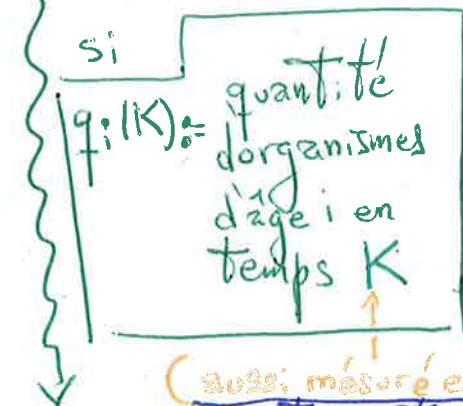
On étudie l'évolution d'une population d'organismes du même type dans le temps:

(1) chaque organisme a une durée de vie maximale de $N=3$ jours

$\rightarrow$ on va noter l'âge d'un organisme avec $1 \leq i \leq N=3$

(2) si un organisme a âge i $\rightarrow$ la probabilité de survivre encore un jour est $p_{i \rightarrow i+1}$ ($\in [0,1]$)

Alors



$\rightarrow$ la quantité d'organismes progéniteurs (vifs au premier jour) par un organisme d'âge i est r_i ($\in \mathbb{N}$)

Ⓐ $q_1(K+1) = r_1 \cdot q_1(K) + \dots + r_3 \cdot q_3(K), \forall K \in \mathbb{N}$

Ⓑ $q_i(K+1) = p_{i \rightarrow i-1} \cdot q_i(K), \forall K \in \mathbb{N}, \forall 1 < i \leq N=3$

On pose maintenant

$$\bar{q}(K) = \begin{pmatrix} q_1(K) \\ q_2(K) \\ q_3(K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

en général $\bar{q}(K) = \begin{pmatrix} q_1(K) \\ \vdots \\ q_N(K) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$

Alors

$$\bar{q}(K+1) = \begin{pmatrix} q_1(K+1) \\ q_2(K+1) \\ q_3(K+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot q_1(K) + r_2 \cdot q_2(K) + r_3 \cdot q_3(K) \\ p_{2 \leftarrow 1} \cdot q_1(K) \\ p_{3 \leftarrow 2} \cdot q_2(K) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1(K) \\ q_2(K) \\ q_3(K) \end{pmatrix}$$

$=: L$

$\bar{q}(K)$

$, \forall K \in \mathbb{N}$

i.e.

$$\boxed{\bar{q}(K+1) = L \cdot \bar{q}(K)}, \quad \forall K \in \mathbb{N}$$

⚠ pour que cela ait du sens il faut imposer $q_i(K) \geq 0, \forall i, K$

en général, $\bar{q}(K+1) = L \cdot \bar{q}(K), \forall K$, pour

$$L := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{N-1} & r_N \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{N \leftarrow N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

N

Matrice de Leslie

Problème

On veut calculer $\bar{q}(K)$ pour $K \gg 1$ étant donné $\bar{q}(0)$.

(entier $\forall$ positif)

Comment faire ?

On va faire un exemple "guidé"

52

On prend

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{q}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Comment calculer $\bar{q}(K)$?

Première idée : $\bar{q}(K) = L^K \cdot \bar{q}(0)$

Et comment calculer L^K avec $K \in \mathbb{N}$?

↓
Deuxième idée :

Si l'on a une base de vecteurs propres $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$
alors

(formule de changement de base)

$$L = P \cdot [T_L]_B \cdot P^{-1}, \text{ avec } P := P_{B \leftarrow B_{\text{can}}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} L^K &= \cancel{(P [T_L]_B P^{-1})} \cdot \cancel{(P [T_L]_B P^{-1})} \cdot \dots \cdot \cancel{(P [T_L]_B P^{-1})} \\ &= P [T_L]_B^K P^{-1} \quad \nabla \nabla \nabla \end{aligned}$$

et cette matrice est diagonale

On commence le calcul :

[Étape 1] Calcul de valeurs propres

$$\det(L - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 7 & 6 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda) \cdot \lambda^2 - 7 \cdot (-\lambda) + 6 \cdot 1$$

$$= -\lambda^3 + 7\lambda + 6$$

Par critère de Gauss | on essaie avec les diviseurs de 6

Après
quelques
essais

$\lambda = -1, \lambda = -2, \lambda = 3$
sont les valeurs propres

Étape 2

$\lambda = -2$

$$\underline{F}_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + 2I_3$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

var libre

Done

$$\underline{F}_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 4x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\lambda = -1}$$

53

$$E_{-1} = \text{Ker} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{with } A + I_3$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{var libre}$$

Donc

$$E_{-1} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\lambda = 3}$$

$$E_3 = \text{Ker} \left(\begin{array}{ccc} -3 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \quad \text{with } A - 3I_3$$

On calcule la FER

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{var libre}$$

Donc

$$E_3 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 9x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{array} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On pose

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(base de vecteurs propres)

$$\Rightarrow [T_L]_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \checkmark$$

et

$$P = P_{B \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -4/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/4 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan
(exo)

Dans ce cas, pour $\bar{f}(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{f}(k) = P \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^{k+2} & (-1)^{k+2} & 3^{k+2} \\ (-2)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \\ (-2)^k & (-1)^k & 3^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \cdot (-2)^{k+2} + 7 \cdot (-1)^{k+2} + 3^{k+2} \\ -4 \cdot (-2)^{k+1} + 7 \cdot (-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ -4 \cdot (-2)^k + 7 \cdot (-1)^k + 3^k \end{pmatrix}$$

avec l'ordinateur

k	1	2	3	4	5	6	7	...
$a_k/4$	1	0	13	6	91	120	673	...

$\leftarrow a_k$

Dans cette séance on va voir → la notion de matrice diagonalisable 19.11
 ↳ la notion / procédure de diagonalisation
 ↳ l'application pour calculer des puissances de matrices

On commence avec un résultat qui formalise un phénomène déjà observé :

THM 10.22 | Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
 Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes
 et soient $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs propres non nuls tels que
 $\bar{v}_1$ est vecteur propre de valeur propre λ_1
 $\vdots$
 $\bar{v}_k$ ————— λ_k
 Alors $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ est libre.

(Preuve) Par récurrence sur $k \geq 1$. Le cas $k=1$ est immédiat.
 On suppose que c'est vrai pour k et on va le démontrer pour $k+1$.
 On écrit

$$(*) \quad \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \bar{v}_{k+1} = \mathbf{0} \quad \text{pour } \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$$

On veut montrer que cela implique forcément $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$. Si l'on multiplie (*) par A à gauche

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= A \cdot \mathbf{0} = A(\alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \bar{v}_{k+1}) = \alpha_1 A \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k A \bar{v}_k + \alpha_{k+1} A \bar{v}_{k+1} \\ (\Delta) \quad &= \alpha_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \bar{v}_{k+1} \end{aligned}$$

et si l'on multiplie (*) par λ_{k+1} on trouve

$$(\square) \quad \mathbf{0} = \alpha_1 \lambda_{k+1} \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k \lambda_{k+1} \bar{v}_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} \bar{v}_{k+1}$$

Alors, $(\square) - (\Delta)$ nous donne

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} - \mathbf{0} = \alpha_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) \bar{v}_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \bar{v}_k + \alpha_{k+1} (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}) \bar{v}_{k+1} = \mathbf{0}$$

Comme $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est libre par hypothèse de linéarité, on conclut que

$$\underbrace{\alpha_1(\lambda_{n+1} - \lambda_1)}_{\neq 0} = 0, \dots, \underbrace{\alpha_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

ce qui implique, par (*), que

$$0 = \underbrace{\alpha_1 \bar{v}_1}_{=0} + \dots + \underbrace{\alpha_n \bar{v}_n}_{=0} + \alpha_{n+1} \bar{v}_{n+1} = \underbrace{\alpha_{n+1} \bar{v}_{n+1}}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_{n+1} = 0. \quad \checkmark \quad \square$$

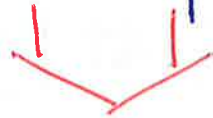
Comment utiliser ce résultat ?

• Si vous avez trouvé une base

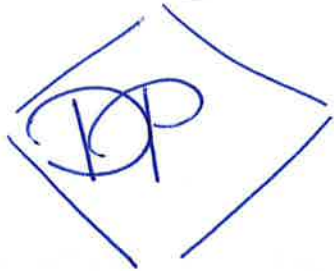
$$B_i = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{m_i}\} \text{ de } \text{Ker}(A - \lambda_i I_n)$$

par définition
 $m_i = \text{mult}_i(\lambda_i)$

pour toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A



• $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ est un ensemble libre
(mais pas forcément une base de $\mathbb{R}^n$)



Chapitre 11 : Diagonalisation

Définition 11.4

Une matrice A est dite diagonalisable

s'il existe une matrice inversible P de la même taille que A telle que

$$P^{-1} A P = D$$

← matrice diagonale



$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Première caractérisation
de diagonalisable
(THM 11.6)

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:
A diagonalisable
 $\iff$ Eq (i)

A possède n vecteurs propres
qui forment une base de $\mathbb{R}^n$

$\iff$ Eq (ii)
Dans $\Diamond P$, B est une base de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_k \dots \lambda_k}_{m_k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \underbrace{\bar{v}_{1,1} \dots \bar{v}_{m_1,1}}_{m_1} & \dots & \underbrace{\bar{v}_{1,k} \dots \bar{v}_{m_k,k}}_{m_k} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$ $\underbrace{\hspace{10em}}_n$

On montre la première équivalence Eq (i). Pour Eq (ii), voir THM 11.14.
(Preuve) $\Downarrow$ Si A est diagonalisable, alors on peut écrire

(1) $P^{-1} A P = D$ avec D diagonale.

Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ et $P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$.

Alors (1) nous dit que $A P = P D$, ce qui implique

$A P \bar{e}_i = P D \bar{e}_i \quad - 1 \leq i \leq n$

Or, $P \bar{e}_i = \bar{v}_i$, ce qui nous dit que $A P \bar{e}_i = A \bar{v}_i$. En outre
 $P D \bar{e}_i = P d_i \bar{e}_i = d_i P \bar{e}_i = d_i \bar{v}_i$. En conséquence $A \bar{v}_i = d_i \bar{v}_i$

$1 \leq i \leq n$ et donc $\bar{v}_i$ est vecteur propre de valeur propre λ_i .
 Comme P est inversible $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est base de $\mathbb{R}^n$
 Formée de vecteurs propres de A .

↑) Si A possède $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ ← base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres avec valeurs propres $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ respectivement, alors

$$A \bar{v}_i = d_i \bar{v}_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

On pose $P := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$. Comme $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$, P est inversible. On pose aussi $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

Alors

$$A \cdot P = A \cdot [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] = [A \bar{v}_1 \dots A \bar{v}_n] = [d_1 \bar{v}_1 \dots d_n \bar{v}_n]$$

$$= D \cdot [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] = D \cdot P$$

ce qui nous donne $P^{-1}AP = D$, i.e. A est diagonalisable. $\square$

Deuxième caractérisation
 de diagonalisable
 THM 11.14

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec toutes les
 valeurs propres réelles.
 A diagonalisable

$\iff$ Eq. (iii)

$$\text{mult}_A(\lambda) = \text{mult}_D(\lambda) \\ \forall \lambda \text{ valeur propre de } A$$

Avant de faire la preuve:

[Déf] Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit le spectre de A comme
 $\text{Spectre}(A) := \{\lambda \text{ valeur propre de } A\}$.

(Preuve) On montre d'abord Eq(ii) ici. Pour $\Uparrow$) c'est clair 56

vu que $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de A . Pour $\Downarrow$)

on utilise d'abord que $\text{Spectre}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Si $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A , alors la valeur propre de chaque $\bar{w}_i$ est dans $\text{Spectre}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. On suppose sans perte de généralité que

- $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{m_1}$ ont valeur propre λ_1 ,
- $\bar{w}_{m_1+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+m_2}$ ont valeur propre λ_2 ,
- ⋮
- $\bar{w}_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+\dots+m_k}$ ont valeur propre λ_k .

Alors, on pose $\mathcal{B}_1 := \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{m_1}\} \subseteq E_{\lambda_1}$,
 $\mathcal{B}_2 := \{\bar{w}_{m_1+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+m_2}\} \subseteq E_{\lambda_2}$,
 $\vdots$

$$\mathcal{B}_k := \{\bar{w}_{m_1+\dots+m_{k-1}+1}, \dots, \bar{w}_{m_1+\dots+m_k}\} \subseteq E_{\lambda_k},$$

sont familles libres car incluses dans $\mathcal{B}$ qui est libre.

Or, comme

($m_i \leq \dim E_{\lambda_i}$, car $\mathcal{B}_i$ libre)

$$n = m_1 + \dots + m_k \leq \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k} \leq \dim \mathbb{R}^n = n$$

par hypothèse

THM 10.22

on a que $m_1 = \dim E_{\lambda_1}, \dots, m_k = \dim E_{\lambda_k}$, ce qui implique que

$\mathcal{B}_1$ est base de $E_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{B}_k$ est base de E_{λ_k} i.e. $\diamondsuit$ donne une base de $\mathbb{R}^n$.

Finalement, on note que $\diamondsuit$ donne une base de $\mathbb{R}^n$ ssi $\text{mult}_g(\lambda_i)$

$= \text{mult}_a(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq k$, vu que

THM 10.30
 $\text{mult}_g(\lambda_i) \leq \text{mult}_a(\lambda_i)$

par deg $P_A(\lambda) = n$

$$\#(\mathcal{B} \text{ dans } \diamondsuit) = \text{mult}_g(\lambda_1) + \dots + \text{mult}_g(\lambda_k) \leq \text{mult}_a(\lambda_1) + \dots + \text{mult}_a(\lambda_k) = n$$

ce qui donne $\mathbb{E}_q$ (iii). □

Application : calcul d'une puissance d'une matrice diagonalisable

$$P^{-1}AP = D \text{ diagonale} \Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

A diagonalisable, avec $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$

Ainsi, si A diagonalisable

$$\begin{aligned} A^N &= \underbrace{(P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdots (P \cdot D \cdot P^{-1})}_{N \text{ facteurs "PDP}^{-1}} \\ &= \underbrace{P \cdot D \cdot D \cdot D \cdots D \cdot D}_{N \text{ facteurs "D"}} \cdot P^{-1} = P \cdot D^N \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} d_1^N & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^N \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

Exemple/Exercice Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$

Calculer A^{1000} .

① Calculer les valeurs propres de $A =$ racines de $P_A(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-\lambda & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \left[\left(\frac{7}{9} - \lambda \right) \left(-\frac{7}{9} - \lambda \right) - \frac{32}{81} \right]$$

$$= -(2-1) \left[2^2 - \frac{49}{81} - \frac{32}{81} \right] = -(2-1)(2^2-1) = -(2-1)^2(2+1) \quad \boxed{67}$$

$$\Rightarrow \text{les valeurs propres sont } \begin{cases} \lambda = -1 \leftarrow \text{mult}_A(-1) = 1 \\ \lambda = 1 \leftarrow \text{mult}_A(1) = 2 \end{cases}$$

② Calculer les espaces propres $\rightarrow$ (base de) $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$

i) Pour $\lambda = -1$

$$E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4/9 & 16/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4/9 & 16/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 2/9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow \frac{9}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{9}{4}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Alors

$$E_{-1} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3/2 \end{matrix} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) Pour $\lambda = 1$

$$E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -16/9 \end{pmatrix}$$

On calcule la FER:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -16/9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & -8/9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{9}{4}L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$E_1 = \text{Ker} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1/2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = \frac{x_2}{2} + 2x_3 \right\}$$

var libres
 x_2, x_3

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} + 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\bar{v}_2$ $\bar{v}_3$

Alors,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nous donne

méthode de Gauss-Jordan

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$A^N = P \cdot D^N \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^N & 0 & 0 \\ 0 & 1^N & 0 \\ 0 & 0 & 1^N \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

si $N=1000$, on trouve

$$A^{1000} = P \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1000} \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette séance on va voir

- (i) la diagonalisation dans le cas complexe * $\rightarrow$ avec un exemple !
- (ii) la notion de $\rightarrow$ norme euclidienne
 $\hookrightarrow$ produit scalaire euclidien + propriétés

On a vu valeurs/vecteurs propres dans $\mathbb{R}$, et la diagonalisation aussi $\rightarrow$ mais ... et si l'on considère plutôt $\mathbb{C}$?

En fait on peut le faire et tous les résultats sont plutôt
parfaits. $\rightsquigarrow$ On va le voir dans un exemple.

Exemple | Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Calculer valeurs/vecteurs propres | dans $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ et montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$!

① Calcul de valeurs propres = racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

Dans ce cas

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 - \lambda \end{pmatrix}$$

dév. selon 2^{ème} colonne $\downarrow$

$$= (2 - \lambda) \cdot \left(\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \frac{3}{4} \right) = -(2 - \lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda + 1)$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ est racine $\quad \Rightarrow$ il y a 2 racines de $\lambda^2 - \lambda + 1$

Comme $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, $P_A(\lambda)$ a deux racines complexes
discriminant de $\lambda^2 - \lambda + 1$

non réelles

$$\begin{aligned} & \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \\ & \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Alors

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 2) \left(\lambda - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow \text{les valeurs propres complexes de } A \text{ sont } 2, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

② Calcul des espaces propres $\rightarrow$ base de $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$
pour chaque valeur propre λ

Si $\boxed{\lambda = 2}$

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La FER de $A - 2I_3$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{2}{3}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{L_2}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$E_2 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ou même $\mathbb{C} \dots$

Pour $\lambda = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$\underline{F}_{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{calculé dans } \mathbb{C}^3 \nabla$$

dans $\mathbb{C}^3 \nabla$

La FER de $A - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)I_3$ est

$$\begin{pmatrix} \frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{i2}{\sqrt{3}}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui nous dit que

$$\underline{F}_{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = ix_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} ix_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{C} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$:

$$\underline{F}_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{dans } \mathbb{C}^3 \nabla$$

La FER de $A - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)I_3$ est

dans $\mathbb{C}^3 \nabla$

$$\begin{pmatrix} \frac{-i\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i) & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{i2}{\sqrt{3}} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$F_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -ix_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -ix_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Abs

$$P = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \\ & & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

méthode de Gauss-Jordan

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & \\ & & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

Chapitre 12 | Produit scalaire et orthogonalité

60

(Probablement rappel de quelques définitions connues)

Déf. 12.1 (norme euclidienne)

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

"longueur
du
vecteur"

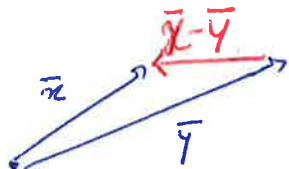
Déf. 12.2

(vecteur normalisé ou unitaire) si $\|\bar{x}\| = 1$, on dit que $\bar{x}$ est unitaire (ou normalisé).

Déf. 12.3

(distance) É. d. $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, la distance entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ est

$$\text{dist}(\bar{x}, \bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$



(Prop. 13)

PROPRIÉTÉS
DE LA NORME

(NOR. 1) $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

(NOR. 2) $\|\bar{x}\| \geq 0, \forall \bar{x}$ et $\|\bar{x}\| = 0$ ssi $\bar{x} = \mathbf{0}$

(NOR. 3) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (inégalité triangulaire)

(Preuve) • $\|\lambda \bar{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$

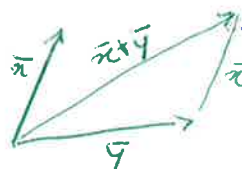
• $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \quad \forall \bar{x}$ et $0 = \|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x_1^2 = \dots = x_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \mathbf{0}$$

la troisième sera démontrée après:



□

Déf. 12.6 (produit scalaire euclidien)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

produit de matrices

idée:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\theta)$$

angle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$

(Prop. 14)

PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

(PS.1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(PS.2) $\begin{cases} (\vec{x} + \lambda \vec{x}') \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x}' \cdot \vec{y} \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \lambda \vec{y}') = \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x} \cdot \vec{y}' \end{cases}$

(PS.3) $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$ et $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

(NRM) $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

(CS) $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

(Preuve) (PS.1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(PS.2) $(\vec{x} + \lambda \vec{x}') \cdot \vec{y} = (x_1 + \lambda x'_1) y_1 + \dots + (x_n + \lambda x'_n) y_n = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n + \lambda (x'_1 y_1 + \dots + x'_n y_n) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda \vec{x}' \cdot \vec{y}$

et l'autre est pareille.

(NRM) $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ et donc (NOR.3) implique (PS.3).

(CS) $0 \leq \|\vec{x} + t\vec{y}\|^2 = (\vec{x} + t\vec{y}) \cdot (\vec{x} + t\vec{y}) = \vec{x} \cdot (\vec{x} + t\vec{y}) + t\vec{y} \cdot (\vec{x} + t\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + t\vec{x} \cdot \vec{y} + t\vec{y} \cdot \vec{x} + t^2 \vec{y} \cdot \vec{y}$

$= \vec{x} \cdot \vec{x} + 2t\vec{x} \cdot \vec{y} + t^2 \vec{y} \cdot \vec{y} \Rightarrow 0 \geq b^2 - 4ac = 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - 4(\vec{y} \cdot \vec{y})(\vec{x} \cdot \vec{x})$

$\Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq (\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{y} \cdot \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| . \square$

Dans cette séance on va voir

26.11

61

- (i) la notion d'orthogonalité
- (ii) la notion de famille orthogonale et orthornormée
- (iii) la notion de complément orthogonal $\rightarrow$ lien avec $\text{Col}(A)$ et $\text{Lgn}(A)$
- (iv) la définition abstraite de produit scalaire

et base
orthogonale
et
orthornormée

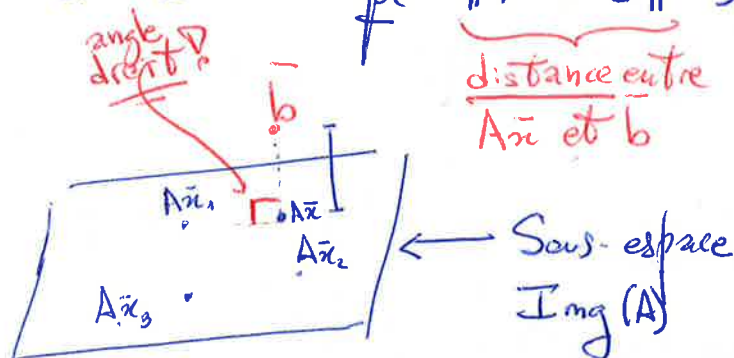
D'abord un peu de motivation

pourquoi étudier "distances"
et "orthogonalité"?

① Souvent, on va rencontrer des SEL $A\bar{x} = \bar{b}$ incompatibles

Comme on ne peut pas les résoudre on va faire le suivant:

"chercher $\bar{x}$ tel que $\|A\bar{x} - \bar{b}\|$ soit la plus petite possible"



② Dans ce cas, $A\bar{x} - \bar{b}$ est orthogonal à $\text{Im}(A)$

Définition 12.10 Étant donné $\bar{x}$ et $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, on dit que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$. On notera dans ce cas $\bar{x} \perp \bar{y}$.



Exemple 12.11

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{x}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{y}$ sont orthogonaux.

Fact

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \text{ssi} \quad \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

(Preuve) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y}$
 $= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}$

Donc l'équivalence suit. □

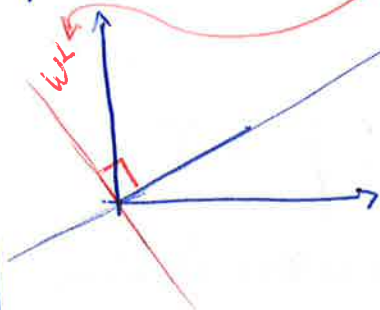
Définition 12.12 Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$, on définit

$$W^\perp := \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \text{ pour tout } \vec{w} \in W \}$$

et on l'appelle complément orthogonal de W.

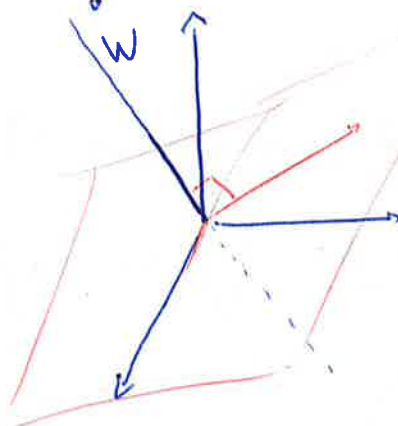
Exemple 12.13*

Pour $n=2$



droite

Pour $n=3$



$W^\perp \leftarrow \text{plan}$

(Proposition 15)

- (1) $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$
- (2) $(W^\perp)^\perp = W$
- (3) $\dim W + \dim W^\perp = n$

(Preuve) (1) On voit bien que $0 \in W^\perp$, car $0 \cdot \bar{x} = 0$ pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
 En outre, si $\bar{v}, \bar{v}' \in W^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\bar{v} + \lambda \bar{v}') \cdot \bar{w} = \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}}_{=0} + \lambda \underbrace{\bar{v}' \cdot \bar{w}}_{=0} = 0, \forall \bar{w} \in W$,
 ce qui nous donne que $W^\perp$ est SEV de $\mathbb{R}^n$.

(2) $(W^\perp)^\perp \supseteq W$

Si $\bar{w} \in W$, alors par définition $\bar{w} \cdot \bar{v} = 0, \forall \bar{v} \in W^\perp$, ce qui implique que $\bar{w} \in (W^\perp)^\perp$.

$W = (W^\perp)^\perp$

On utilise (3). Comme $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ et

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) \stackrel{(3)}{=} n = \dim(W^\perp) + \dim((W^\perp)^\perp)$$

alors $\dim(W) = \dim((W^\perp)^\perp)$. L'inclusion $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ nous dit alors que $W = (W^\perp)^\perp$.

(3) Sera démontré dans les exercices. □

Comment calculer $W^\perp$ en général ?

- (1) Calculer une base $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ de W
- (2) Pour chaque $\bar{w}_i \begin{pmatrix} w_{i,1} \\ \vdots \\ w_{i,n} \end{pmatrix} \rightarrow \text{EQUATION } \bar{x} \cdot \bar{w}_i = w_{i,1}x_1 + \dots + w_{i,n}x_n = 0$
- (3) $W^\perp = \text{Ker} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_k \end{bmatrix}^T = \text{Ker} \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{k,1} & \dots & w_{k,n} \end{pmatrix}$

Le résultat qui justifie cette méthode est

Lemme 16 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ une base de W . Alors $\bar{v} \in W^\perp$ ssi $\bar{v} \cdot \bar{w}_1 = \bar{v} \cdot \bar{w}_2 = \dots = \bar{v} \cdot \bar{w}_n = 0$

(Preuve) $\Rightarrow$) C'est clair, vu que $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n \in W$.

$\Leftarrow$) On va montrer que $\bar{v} \cdot \bar{w} = 0, \forall \bar{w} \in W$, si $\bar{v} \cdot \bar{w}_1 = \dots = \bar{v} \cdot \bar{w}_n = 0$.

Or, comme $\bar{w} \in W$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n$$

En conséquence

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) = \alpha_1 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}_2}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{w}_n}_{=0} = 0$$

et donc $\bar{v} \in W^\perp$. □

Cas intéressant $\rightarrow$ $\{ \text{Col}(A) \text{ et } \text{Lgn}(A) \}$!

Théorème 12.18 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, alors

$$(a) \text{Lgn}(A)^\perp = \text{Ker}(A) \quad (b) \text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$$

(Preuve) On écrit $A = \begin{pmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_m^T \end{pmatrix}$ avec $l_1, \dots, l_m \in \mathbb{R}^n$.

Alors, pour (a)

$$\bar{v} \in \text{Lgn}(A)^\perp \Leftrightarrow \bar{v} \cdot l_i = 0, \forall i = 1, \dots, m \Leftrightarrow l_i^T \cdot \bar{v} = 0, \forall i = 1, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_m^T \end{pmatrix} \cdot \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \bar{v} = \mathbf{0}.$$

Pour (b), on note que $\text{Col}(A) = \text{Lgn}(A^T)$ et donc

$$\text{Col}(A)^\perp = (\text{Lgn}(A^T))^\perp \stackrel{(a)}{=} \text{Ker}(A^T).$$

□

Définition 12.19

Une famille $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite

• orthogonale si $\bar{w}_i \perp \bar{w}_j$ pour tout $i \neq j$.

• orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et $\|\bar{w}_i\| = 1$ pour tout i .

Exemple 12.20

$\mathcal{B}_{can} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ est une famille orthonormée.

Pr. 12.21

Si $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ est une famille orthogonale et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i$, alors

$$\left\{ \frac{\bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|}, \dots, \frac{\bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|} \right\} \text{ est famille orthonormée.}$$

normalisation de $\mathcal{F}$

Deux propriétés importantes

(Lemme 17) (i) Si $\mathcal{F} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ orthogonale $\Rightarrow \mathcal{F}$ libre
et $\bar{w}_i \neq 0, \forall i$

(Thm. 12.23) (i) Si $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ base de $W \subseteq \mathbb{R}^n$ et elle est orthogonale $\Rightarrow \forall \bar{w} \in W$
$$\bar{w} = \underbrace{\frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2}}_{\text{coordonnée de } \bar{w} \text{ relative à } \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}} \cdot \bar{w}_1 + \dots + \underbrace{\frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_n}{\|\bar{w}_n\|^2}}_{\text{coordonnée de } \bar{w} \text{ relative à } \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}} \cdot \bar{w}_n$$

(Preuve) (i) Si $\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n = 0$, alors on fait

$$0 = \bar{w}_i \cdot 0 = \bar{w}_i \cdot (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) = \underbrace{\alpha_1 \bar{w}_i \cdot \bar{w}_1}_{=0} + \dots + \underbrace{\alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i}_{\neq 0 \text{ car } \bar{w}_i \neq 0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\bar{w}_i \cdot \bar{w}_n}_{=0} = \alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i$$

ce qui implique $\alpha_i = 0$. Alors $\mathcal{F}$ est libre.

(c) Si

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_n \bar{w}_n$$

alors

$$\begin{aligned} \bar{w}_i \cdot \bar{w} &= \bar{w}_i \cdot (\alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_i \bar{w}_i + \dots + \alpha_n \bar{w}_n) \\ &= \alpha_1 \underbrace{\bar{w}_i \cdot \bar{w}_1}_{=0} + \dots + \alpha_i \underbrace{\bar{w}_i \cdot \bar{w}_i}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\bar{w}_i \cdot \bar{w}_n}_{=0} \\ &= \alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i = \alpha_i \|\bar{w}_i\|^2 \end{aligned}$$

ce qui nous dit que

$$\alpha_i = \frac{\bar{w}_i \cdot \bar{w}}{\|\bar{w}_i\|^2} = \frac{\bar{w} \cdot \bar{w}_i}{\|\bar{w}_i\|^2}, \forall i.$$

□

Définition du produit scalaire abstrait

Soit V un espace vectoriel. Un produit scalaire sur V est une application qui associe un nombre réel $(u|v)$ à toute paire u, v d'éléments de V , telle que

Par (PS.1), il suffit de demander une seule de ces deux identités !

(PS.1) $(u|v) = (v|u), \forall u, v \in V$

(PS.2) $(u + \lambda u'|v) = (u|v) + \lambda(u'|v)$ et $(u|v + \lambda v') = (u|v) + \lambda(u|v')$
 $\forall u, u', v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

(PS.3) $(u|u) \geq 0 \forall u \in V$ et $(u|u) = 0$ ssi $u = 0_V$

Exemple Pour $V = \mathbb{P}_2$, on définit le produit scalaire

$$(p|q) = p(0) \cdot q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \forall p, q \in \mathbb{P}_2$$

On vérifie que c'est vraiment un produit scalaire. En effet (PS.1) est clair. Pour (PS.2), on note que $(p_1 + \lambda p_2|q) = (p_1 + \lambda p_2)(0)q(0) + (p_1 + \lambda p_2)(1)q(1) + (p_1 + \lambda p_2)(2)q(2)$
 $= (p_1(0)q(0) + p_1(1)q(1) + p_1(2)q(2)) + \lambda(p_2(0)q(0) + p_2(1)q(1) + p_2(2)q(2)) = (p_1|q) + \lambda(p_2|q).$

Pour (PS.3), on voit que $(p|p) = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 \geq 0$ et $(p|p) = 0$ équivaut à $0 = p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2$
 i.e. $p(0) = p(1) = p(2) = 0$, ce qui équivaut à $p = 0$, vu que seul polynôme de deg ≤ 2 avec 3 racines est le polynôme nul.

Dans cette séance on va voir

64

28.11

- (i) un peu plus sur les produits scalaires abstraits $\rightarrow$ $\begin{cases} \bullet \text{ norme associée,} \\ \bullet \text{ famille orthogonale,} \end{cases}$
- (ii) la notion de projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel $\rightarrow$ et comment la calculer!
- (iii) le procédé de Gram-Schmidt

Exemple

Un autre exemple de produit scalaire abstrait.

Pour $V = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) := 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$$
$$= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On va montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

En effet

$$(PS.1) \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 = 3y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 3y_2x_2$$
$$= \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \quad \checkmark$$

$$(PS.2) \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 + \lambda x'_1 \\ x_2 + \lambda x'_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = 3(x_1 + \lambda x'_1)y_1 + (x_1 + \lambda x'_1)y_2 + (x_2 + \lambda x'_2)y_1 + 3(x_2 + \lambda x'_2)y_2$$
$$= 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + \lambda(3x'_1y_1 + x'_1y_2 + x'_2y_1 + 3x'_2y_2) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \lambda \left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \quad \checkmark$$

$$(PS.3) \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = 2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

et on l'égalitéssi: $x_1^2 = x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$

Pour produit scalaire abstrait on définit aussi la norme associée via

$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}, \quad \forall v \in V$$

! la notion d'orthogonalité $v \perp w$ via

$$v \perp w \iff (v|w) = 0,$$

la notion de famille orthogonale et orthonormée comme dans le cas du produit scalaire euclidien, ...

Exemple précédent (suite)

Pour le produit scalaire abstrait vu dans l'exemple précédent:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)^2}$$

et

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 = 0$$

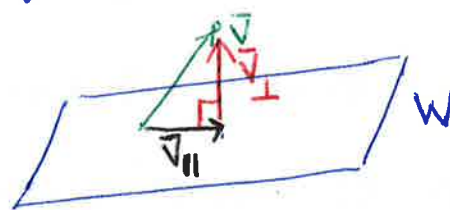
Par exemple

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ pour ce produit scalaire abstrait}$$

$$\left(\text{mais } \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \not\perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ pour le produit scalaire euclidien!} \right)$$

§ Projection orthogonale (Section 12.6 des notes de Sacha)

Idee Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEV et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$



On peut écrire

$$\bar{v} = \underbrace{\bar{v}_\perp}_{\in W^\perp} + \underbrace{\bar{v}_\parallel}_{\in W} \quad (*)$$

Faits importants

→ $\bar{v}_\perp$ et $\bar{v}_\parallel$ sont uniques

→ on appelle $\bar{v}_\parallel$ la projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W



Théorème 12.32 = Définition de projection orthogonale par sa "propriété"

Pour $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEV et $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique paire $\bar{v}_\parallel$ et $\bar{v}_\perp$ telle que

(P.O.1) $\bar{v} = \bar{v}_\parallel + \bar{v}_\perp$

(P.O.2) $\bar{v}_\parallel \in W$ ← projection orthogonale de $\bar{v}$ sur W

(P.O.3) $\bar{v}_\perp \in W^\perp$

NOTATION $\text{proj}_W(\bar{v}) := \bar{v}_\parallel$

En plus, $\text{proj}_W(\bar{v})$ est l'unique vecteur de W qui satisfait que

$$\|\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{w}\|, \forall \bar{w} \in W$$

↑
i.e. $\text{proj}_W(\bar{v})$ est le vecteur de W le plus proche à $\bar{v}$!

Cela nous donne deux propriétés qui caractérisent $\text{proj}_W(\bar{v})$
→ c'est utile pour démontrer des résultats mais pas pour calculer !

Alors, comment calculer $\text{proj}_W(\bar{v})$? → Il faut une BO de W !!

Théorème 12.33 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un SEV et $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k\}$ une BO de W . Alors,

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_1}{\|\bar{w}_1\|^2} \bar{w}_1 + \dots + \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_k}{\|\bar{w}_k\|^2} \bar{w}_k$$

En particulier, l'application $\bar{v} \mapsto \text{proj}_W(\bar{v})$ est linéaire.

(Preuve) Comme $\text{proj}_W(\bar{v}) \in W$ on peut écrire

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = \alpha_1 \bar{w}_1 + \dots + \alpha_k \bar{w}_k$$

Et comme $\bar{v} = \underbrace{\text{proj}_W(\bar{v})}_{\in W} + \underbrace{(\bar{v} - \text{proj}_W(\bar{v}))}_{\in W^\perp}$, alors, par le Lemme 16,

$$\begin{cases} (\bar{v} - \alpha_1 \bar{w}_1 - \dots - \alpha_k \bar{w}_k) \cdot \bar{w}_1 = 0, \\ \vdots \\ (\bar{v} - \alpha_1 \bar{w}_1 - \dots - \alpha_k \bar{w}_k) \cdot \bar{w}_k = 0. \end{cases}$$

Or, comme B est orthogonale

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{v} - \alpha_1 \bar{w}_1 - \dots - \alpha_i \bar{w}_i - \dots - \alpha_k \bar{w}_k) \cdot \bar{w}_i = \bar{v} \cdot \bar{w}_i - \underbrace{\alpha_1 \bar{w}_1 \cdot \bar{w}_i}_{=0} - \dots - \alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i - \dots - \underbrace{\alpha_k \bar{w}_k \cdot \bar{w}_i}_{=0} \\ &= \bar{v} \cdot \bar{w}_i - \alpha_i \bar{w}_i \cdot \bar{w}_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}_i}{\|\bar{w}_i\|^2}, \forall i$$

On laisse la linéarité comme exercice. □

Exemple 12.34 BO de W

Soit $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On va calculer $\text{proj}_W \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= -\frac{11}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On peut donner la matrice de proj_W :

Théorème 12.35 Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ une BON de W . Alors,

$$[\text{proj}_W]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix}^T$$

(Preuve) Le théorème précédent nous dit que

$$\text{proj}_W(\bar{v}) = (\bar{v} \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + \dots + (\bar{v} \cdot \bar{u}_n) \bar{u}_n,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \text{proj}_W(\bar{v}) &= (\bar{v} \cdot \bar{u}_1) \bar{u}_1 + \dots + (\bar{v} \cdot \bar{u}_n) \bar{u}_n = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \bar{v} \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{pmatrix} \bar{v} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix}^T \bar{v}, \text{ ce qui donne le résultat.} \end{aligned}$$

□

Maïs comment calculer une BO/BON de W ?

↓
Procédé de Gram-Schmidt (GS)

On commence avec $\mathcal{B} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ **base** de W
 On produit $\mathcal{B}' = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ **BO** de W

Méthode

$$\bar{v}_1 := \bar{w}_1$$

$$\bar{v}_2 := \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1$$

$$\bar{v}_3 := \bar{w}_3 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2$$

⋮

$$\bar{v}_n := \bar{w}_n - \frac{\bar{w}_n \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_n \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 - \dots - \frac{\bar{w}_n \cdot \bar{v}_{n-1}}{\|\bar{v}_{n-1}\|^2} \bar{v}_{n-1}$$

Exemple 12.44

Soit $W = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_3} \right\}$

On va construire une BO de W via GS

$$\bar{v}_1 := \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 := \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_3 &:= \bar{w}_3 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{3/2} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et si l'on veut une BON? $\leadsto$ On normalise la BO ($\equiv$ GS "normalisée")

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &:= \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3/2}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ \bar{u}_3 &:= \frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{u}_1 &:= \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \left\{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \right\}$$

BON de W

Dans cette séance on va voir

03.12 167

- (i) la décomposition QR d'une matrice $\leftarrow$ application de GS!
- (ii) la méthode des moindres carrés $\rightarrow$ trois méthodes de calcul

Décomposition QR (Section 12.8 des notes de Sacha)

But : étant donné $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ avec $\text{rang}(A) = n$, on veut trouver t.q.

on l'appelle
décomposition
QR de A

(i) $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
(i.e. Q orthogonale)
(ii) $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
triangulaire sup

$\downarrow$

$A = QR$

Définition 14.3 Une matrice $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $Q^T \cdot Q = I_n$.

Méthode pour trouver Q et R

(pour $\text{rang}(A) = n$)

① On écrit $A = [\overset{\text{colonnes de A}}{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n}]$
et on applique GS à $\{\bar{a}_1, \bar{a}_n\}$
pour trouver une BON de $\text{Im}(A)$
 $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$

② On pose $Q := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$
 $R := Q^T \cdot A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

Thm 12.45 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ a rang n, alors Q est une matrice orthogonale, R est triangulaire supérieure et $A = QR$.
dont le premier coeff. non nul de chaque ligne non nulle est > 0

(Preuve) On rappelle le procédé de GS appliqué à $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1 := \bar{a}_1 \\ \bar{v}_2 := \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_3 := \bar{a}_3 - \frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{a}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_n := \bar{a}_n - \frac{\bar{a}_n \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \dots - \frac{\bar{a}_n \cdot \bar{v}_{n-1}}{\|\bar{v}_{n-1}\|^2} \bar{v}_{n-1} \end{array} \right. \quad \text{Normalisation} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mu}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} \\ \bar{\mu}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} \\ \bar{\mu}_3 := \frac{\bar{v}_3}{\|\bar{v}_3\|} \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n := \frac{\bar{v}_n}{\|\bar{v}_n\|} \end{array} \right.$$

En conséquence,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1 = \|\bar{v}_1\| \bar{\mu}_1 \\ \bar{a}_2 = (\bar{a}_2 \cdot \bar{\mu}_1) \bar{\mu}_1 + \|\bar{v}_2\| \bar{\mu}_2 \\ \bar{a}_3 = (\bar{a}_3 \cdot \bar{\mu}_1) \bar{\mu}_1 + (\bar{a}_3 \cdot \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_2 + \|\bar{v}_3\| \bar{\mu}_3 \\ \vdots \\ \bar{a}_n = (\bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_1) \bar{\mu}_1 + (\bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_2 + (\bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_3) \bar{\mu}_3 + \dots + (\bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_{n-1}) \bar{\mu}_{n-1} + \|\bar{v}_n\| \bar{\mu}_n \end{array} \right.$$

Cela nous dit que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \dots & \bar{a}_n \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{\mu}_n \end{bmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \|\bar{v}_1\| & \bar{a}_2 \cdot \bar{\mu}_1 & \bar{a}_3 \cdot \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_1 \\ 0 & \|\bar{v}_2\| & \bar{a}_3 \cdot \bar{\mu}_2 & \dots & \bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_2 \\ 0 & 0 & \|\bar{v}_3\| & \dots & \bar{a}_n \cdot \bar{\mu}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\bar{v}_n\| \end{pmatrix}}_R$$

En plus

$$\begin{aligned} Q^T \cdot Q &= \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\mu}_n^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{\mu}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1^T \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{\mu}_1^T \bar{\mu}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_n^T \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{\mu}_n^T \bar{\mu}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \cdot \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{\mu}_1 \cdot \bar{\mu}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\mu}_n \cdot \bar{\mu}_1 & \dots & \bar{\mu}_n \cdot \bar{\mu}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n \end{aligned}$$

□

Et si $\text{rang}(A) < n$?

Le résultat est encore vrai mais

On définit $Q := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_r]$
avec $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\}$ BON obtenue de GS
appliquée à base $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\}$ de $\text{Im}(A)$ formé
de colonnes retirables de $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ et $R = Q^T A$.

$\bullet Q \in M_{m \times r}(\mathbb{R})$
orthogonale
 $\bullet R \in M_{r \times n}(\mathbb{R})$
échelonnée dont le premier
coeff. non nul de chaque ligne non nulle
 où $r := \text{rang}(A)$ est > 0 .

Thm. 12.47 Si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ a rang r , alors

Q est orthogonale, R est échelonnée dont le premier coeff. non nul de chaque ligne non nulle est > 0 .
 $Q \in M_{m \times r}(\mathbb{R})$ $R \in M_{r \times n}(\mathbb{R})$ et $A = QR$.

Exemple/Exercice 12.46

On calcule la décomposition QR
de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

Ici $\text{rang}(A) = 2$, $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le procédé de GS nous donne

$$\begin{cases} \bar{v}_1 := \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2 := \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} & \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

En conséquence

$$Q := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

et

$$R := Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

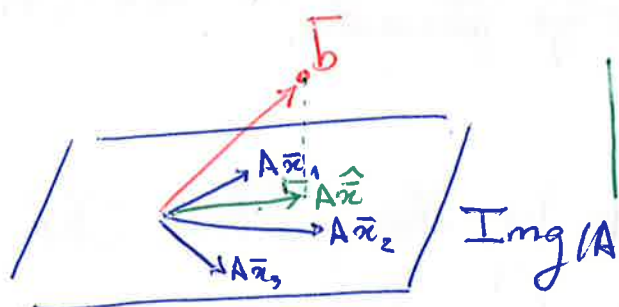
$\uparrow \|\bar{v}_1\|$
 $\downarrow \|\bar{v}_2\|$

Chapitre 13: Méthode des moindres carrés

Motivation Souvent on veut résoudre $(*) A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ pour $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
mais $(*)$ est **SÉL incompatible** ∇ $\underbrace{A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})} \quad \underbrace{\bar{b} \in \mathbb{R}^m}$

mais $(*)$ est **SÉL incompatible** ∇

On fait quoi alors ? $\longrightarrow$ On peut essayer de trouver le $\hat{x}$ le plus proche d'être une solution de $(*)$:



$$\|A \hat{x} - \bar{b}\| \leq \|A \bar{x} - \bar{b}\|, \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Définition 13.3 Pour un SEL $(*) A \bar{x} = \bar{b}$, avec $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$, une pseudo-solution de $(*)$, aussi appelée une solution de $(*)$ au sens des moindres carrés, est un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait :

$$(MC) \quad \|A \hat{x} - \bar{b}\| \leq \|A \bar{x} - \bar{b}\| \quad \text{pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

$$(\Leftrightarrow \|A \hat{x} - \bar{b}\|^2 \leq \|A \bar{x} - \bar{b}\|^2 \quad \text{pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

$$(\Leftrightarrow \sum_{j=1}^m ((A \hat{x})_j - b_j)^2 \leq \sum_{j=1}^m ((A \bar{x})_j - b_j)^2 \quad \text{pour tout } \bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

RR: comme c'est une somme de carrés on parle de "moindres carrés".

69

Méthode 1

$\hat{\pi}$ est sol. de $A \cdot \bar{\pi} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b})$

On résout $A \cdot \vec{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\vec{b})$ et cela donne tous les $\vec{x}$ possibles.
(c'est S.E.L est compatible!)

(Preuve) Cela suit de la définition de projection orthogonale $\square$

RK Cette méthode n'est pas optimale en général 😞

car ① I faut une base de $\text{Im}g(A)$

② Il fait appliquer QS pour trouver une BON de $\Sigma_{mg}(M)$

③ $\mathcal{I}$ fait calculer la projection orthogonale de b sur $\text{Im}(A)$

④ Il faut résoudre le S.E.L. $A \cdot \bar{x} = \text{proj}_{\text{Im}(A)}(b)$.

Méthode 2 | $\hat{\pi}$ est sol de $(*)$ au sens de MC

(Thm 13.6)

$\hat{x}$ est sol de l'équation normale $A^T A \bar{x} = A^T b$

On résout l'équation normale $A^T A \hat{x} = A^T \cdot \bar{b}$ et cela donne toutes les $\hat{x}$ possibles (c'est S.E.L. est compatible!)

(Preuve) On écrit $\bar{b} = (\bar{b} - \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b})) + \text{proj}_{\text{Im}(A)}(\bar{b}) = b_{\perp} + b_{\parallel}$

Comme $\text{Col}(A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$ (Thm 12.18, feuille 62),

$$(\square) \quad A^T \cdot \bar{b} = A^T(\bar{b}_\perp + \bar{b}_\parallel) = \mathbf{0} + A^T \cdot \bar{b}_\parallel,$$

abs si $\hat{x}$ est sol de (*) au sens de MC, i.e. $A\hat{x} = \bar{b}_\parallel$

par la méthode 1, abs $A^T A \cdot \hat{x} = A^T \bar{b}_\parallel = A^T \cdot \bar{b}$, i.e. $\hat{x}$ est sol. de l'équation normale. Réciproquement, si $\hat{x}$

est sol de l'équation normale $A^T A \cdot \hat{x} = A^T \cdot \bar{b}$, on

a que $A^T(A\hat{x} - \bar{b}) = \mathbf{0}$, i.e. $\underbrace{A\hat{x} - \bar{b}}_{\in \text{Col}(A)} \in \underbrace{\text{Ker}(A^T)}_{\in \text{Col}(A)^\perp} = \text{Col}(A)^\perp$

$$A\hat{x} - \bar{b}_\parallel = \mathbf{0}, \text{ i.e. } A\hat{x} = \bar{b}_\parallel$$

En conséquence $\hat{x}$ est une sol de (*) au sens de MC. $\square$

Méthode 3	$\hat{x}$ est sol de (*) au sens de MC
	$\iff$
(Thm 13.11)	$\hat{x}$ est sol. de $R\hat{x} = Q^T \cdot \bar{b}$ pour $A = QR$ déc. QR

(Preuve) Si $\hat{x}$ est sol de (*) au sens de MC, abs

$$A\hat{x} - \bar{b} \in \text{Col}(A)^\perp \stackrel{\uparrow \text{Im}(A) = \text{Im}(Q)}{=} \text{Col}(Q)^\perp \stackrel{\uparrow \text{Thm 12.18}}{=} \text{Ker}(Q^T)$$

$$\Rightarrow Q^T(A\hat{x} - \bar{b}) = \mathbf{0} \Rightarrow \underbrace{Q^T A}_{=: R} \hat{x} = Q^T \cdot \bar{b} \Rightarrow \boxed{R\hat{x} = Q^T \cdot \bar{b}}$$

Réciproquement, si $\hat{x}$ est sol. de $R\hat{x} = Q^T \cdot \bar{b}$, abs $R\hat{x} = Q^T \bar{b}$, i.e. $Q^T A \hat{x} = Q^T \bar{b}$, ce qui implique $\underbrace{R^T Q^T A}_{=(QR)^T} \hat{x} = \underbrace{R^T Q^T \bar{b}}_{=(QR)^T}$,

i.e. $A^T A \hat{x} = A^T \bar{b}$. Par la méthode 1, on a que $\hat{x}$ est une sol de (*) au sens de MC. $\square$

Exemple/Exercice 13.7 Résoudre au sens de MC le S.E.L. 70

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_b$$

via l'équation normale:

(EN) Dans ce cas, il faut résoudre

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12 & 65 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & 1 \\ 65 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 12 & 65 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 147 \end{pmatrix}}_b$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} 4373 & 79 \\ 79 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{6878} \begin{pmatrix} 3 & -79 \\ -79 & 4373 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10239 \\ 229 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12626}{6878} \\ \frac{192536}{6878} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6313}{3439} \\ \frac{96268}{3439} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,83... \\ 27,99... \end{pmatrix}$$

Exemple/Exercice 13.13 Résoudre au sens de MC le S.E.L.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}}_b$$

via la décomposition QR.

(QR) Il faut résoudre

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ pour } A = QR$$

On calcule donc Q et R :

$$\textcircled{1} \begin{cases} \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 := \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2 = \bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}^3}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{u}_1 := \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\ \bar{u}_2 := \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} Q^T \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{R \cdot \bar{x} = Q^T \cdot \bar{b}} \text{ donne } \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Avantage de $\boxed{QR}$ sur $\boxed{EN}$ $\rightarrow$ $\boxed{R \bar{x} = Q^T \bar{b} \text{ est un SE triangulaire}}$

! mais Q est parfois difficile à calculer (car beaucoup de $\sqrt{\quad}$).

05.12

Dans cette séance on va voir

(i) la droite de régression

→ application de la méthode
des moindres carrés !

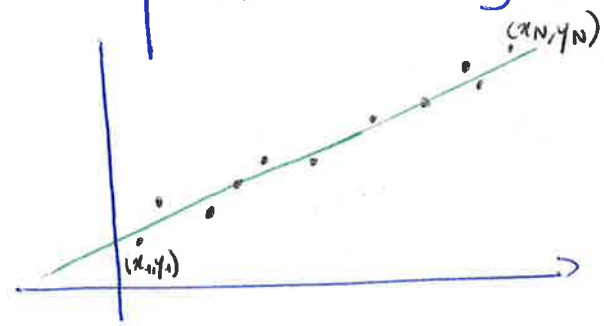
(ii) la diagonalisation de
matrices symétriques

Application de méthode des moindres carrés

Imaginons que l'on a une collection de points

$$P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\} \in \mathbb{R}^2$$

et l'on veut trouver la "meilleure droite" qui approxime le
mieux ces points dans P : $|\alpha x + \beta = y| (*)$



Idee: on veut $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathbb{R}$

telles que les différences dans le tableau

Valeur prédite par (*)	Valeur réelle
$\hat{\alpha} x_1 + \hat{\beta}$	y_1
$\vdots$	$\vdots$
$\hat{\alpha} x_N + \hat{\beta}$	y_N

soient minimales ! !

On veut donc $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ tels que

$$E^2 = (\hat{\alpha} x_1 + \hat{\beta} - y_1)^2 + \dots + (\hat{\alpha} x_N + \hat{\beta} - y_N)^2$$

soit le plus petit possible (par $P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ fixes)

$$\mathcal{E}^2 = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\|^2$$

"erreur d'approximation quadratique"
 i.e. on veut trouver $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ tel que

$$\mathcal{E} = \left\| \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \right\|$$

soit le plus petit possible
 pour $\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ fixes

"erreur d'approximation"

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \text{ est une sol. de } \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \text{ au sens des MC}$$

∇
 $\circ$

Conclusion / (Définition aussi)

$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ droite de régression de $\mathcal{P} = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \text{ sol. de SEL } \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \text{ au sens des MC}$$

Exemple / Exercice

Calculer la droite de régression de la famille de points
 $\mathcal{P} = \{(0, 6), (1, 0), (2, 0)\}$.

Comme la droite de régression $\hat{\alpha}x + \hat{\beta} = y$ est la sol. de

72

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

au sens des MC, on va calculer la solution. Dans ce cas, on va le faire avec l'EN: $A^T A \cdot \vec{x} = A^T \vec{b}$.

On trouve

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y = -3x + 5}$$

Exercice Calculer la droite de régression de

$$S = \{(-6, -1), (-2, 2), (1, 1), (7, 6)\}$$

Dans ce cas, il faut résoudre le SEL

au sens des MC. Avec l'EN on trouve

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\begin{pmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} \cdot x + 2}$$

Chapitre 14: ① Diagonalisation de matrices symétriques

Rappel

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $A^T = A$

$M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $M^T M = I_n$

RR

orthogonale + carrée $\Rightarrow$ inversible

(car $M^T M = I_n \Rightarrow \text{Ker}(M) = \{0\} \Rightarrow M$ inversible)
M carrée

Lemme 2.1 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$(A^T \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (A \bar{y}), \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

En conséquence, A symétrique ssi $(A \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (A \bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

(Preuve) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}^T \bar{v} \quad (CD)^T = D^T C^T \quad (C^T)^T = C$

$$(A^T \bar{x}) \cdot \bar{y} \downarrow = (A^T \bar{x})^T \bar{y} \downarrow = \bar{x}^T (A^T)^T \bar{y} \downarrow = \bar{x}^T A \bar{y} = \bar{x} \cdot (A \bar{y}) \quad \square$$

Corollaire 7 Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, alors

$$(M \bar{x}) \cdot (M \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

(Preuve)

$$(M \bar{x}) \cdot (M \bar{y}) = (M^T M \bar{x}) \cdot \bar{y} = (I_n \bar{x}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \square$$

Théorème spectral

(Thm 14.9)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors

Asymétrique

$\Leftrightarrow$

$\exists Q \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonal
telle que $Q^T A Q$ est
diagonale

(on dit que A est orthogonalement diagonalisable)

Si $Q = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$, alors $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ est BON de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs propres de A !

Si λ_i est la valeur propre associée à $\bar{v}_i$, alors

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^T A Q \Rightarrow A = Q D Q^T = \lambda_1 \bar{v}_1 \bar{v}_1^T + \dots + \lambda_n \bar{v}_n \bar{v}_n^T$$

(décomposition spectrale de A)

Mais comment la calculer ?

← C'est "presque" la même méthode que pour la diagonalisation usuelle !!!

① Calculer les racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$
pour obtenir les valeurs propres.

② Pour chaque valeur propre λ_0 ,
trouver une base de $E_{\lambda_0} = \text{Ker}(A - \lambda_0 I_n) \leadsto B_{\lambda_0}$

③ Appliquer GS à B_{λ_0} pour trouver
une BON B_{λ_0}'' de E_{λ_0} et faire
la réunion de toutes les B_{λ_0}'' pour
trouver la BON $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$
formée de vecteurs propres de A .

Exemple / Exercice
14.4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ symétrique } \checkmark$$

Alors

$$\textcircled{1} P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \left[(6-\lambda)(3-\lambda) - 4 \right] \\ + 2 \left[(-2)(3-\lambda) - 8 \right] + 4 \left[-4 - 4(6-\lambda) \right]$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) + 4\lambda - 28 + 16\lambda - 112 \\ = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2).$$

$\Rightarrow$ valeurs propres: 7 (mult. alg 2) et -2 (mult. alg 1)

FER

$$\textcircled{2} \text{ Pour } \boxed{\lambda = -2} : E_{-2} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3/2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Pour } \boxed{\lambda = 7} : E_7 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = \frac{x_2}{2} + x_3 \right\} \\ = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{3} \text{ On applique GS: Pour } \boxed{\lambda = -2} : B_{-2}'' = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\} \checkmark. \text{ Pour } \boxed{\lambda = 7} : B_7' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_7'' = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\} \checkmark \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

BON
de $\mathbb{R}^3$

Dans cette séance on va voir

10.12

74

(i) un résultat sur les matrices symétriques ← pour mieux comprendre le thm. spectral

(ii) la décomposition en valeur singulières d'une matrice ∇ (SVD)

Orthogonalité des vecteurs propres associés à valeurs propres distinctes

Corollaire 8 | Soit A une matrice symétrique de taille n .

Si $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ sont des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes, alors $\bar{v}_1 \perp \bar{v}_2$.

(Preuve) On suppose que $A\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1$ et $A\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Alors $\lambda_1 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (A\bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2 \stackrel{\text{Lemme 2.1}}{=} \bar{v}_1 \cdot (A\bar{v}_2) = \bar{v}_1 \cdot (\lambda_2 \bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$

$$\Rightarrow (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_2}_{\neq 0}) \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 \perp \bar{v}_2 \quad \square$$

Chapitre 15 : Décomposition en valeurs singulières (SVD)
(en anglais)

Objectif : é.d. $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\xrightarrow{\text{on veut}}$ $\begin{cases} U \in M_{m \times m}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \\ \Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ diagonale et non négative} \\ V \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ orthogonale} \end{cases}$ $\uparrow$ $(\Sigma_{ij} \geq 0, V_{ij})$

telles que $A = U \Sigma V^T$ ← décomposition en valeurs singulières (SVD)

typiquement

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \underbrace{\Sigma_{11}}_{\geq 0} & & \\ & \underbrace{\Sigma_{ll}}_{\geq 0} & \\ & & 0 \dots 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \leftarrow \text{pas forcément carrée } \nabla \nabla$$

On dit que Σ représente des étirements dans certaines directions (ou "stretch")

Par contre U et V^T sont des isométries (car $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ et $\|V^T\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, vu qu'il s'agit de matrices carrées orthogonales).

Théorème 15.5
(Existence de SVD)

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Alors, il existe

- (a) $U \in M_m(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. $U^T U = I_m$),
- (b) $\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ diagonale et non négative (i.e. $\Sigma_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$ et $\Sigma_{ij} \geq 0$, $\forall ij$),
- (c) $V \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale (i.e. $V^T V = I_n$),

telles que

$$A = U \Sigma V^T$$

cela se ressemble à la diagonalisation orthogonale
 $A = Q D Q^T$

Terminologie

$$U = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_m]$$

↑ ↑ vecteurs singuliers à gauche de A

• $\Sigma_{i,i}$ ← valeurs singulières de A ($1 \leq i \leq \min(n, m)$)

$$V = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n]$$

↑ ↑ vecteurs singuliers à droite de A

[RK] |I| n'y a pas beaucoup d'unicité dans la SVD [75]

Par exemple



$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V^T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U'} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\Sigma'} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{V'^T}$$

Les matrices U et V peuvent donc changer !

Ce qui ne change pas est l'ensemble de valeurs singulières.

(on va le voir après)

Comment calculer une SVD ?

① Calcul de la matrice Σ

tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

①① Calculer les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$

[Fact] (Lemme 23) $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$

On répète chaque valeur propre autant de fois qu'elle a sa multiplicité algébrique !

(Preuve) $\lambda_i \|\vec{v}_i\|^2 = \lambda_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (A^T A \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i = (A \vec{v}_i) \cdot (A \vec{v}_i) = \|A \vec{v}_i\|^2 \geq 0$

par $\vec{v}_i$ vecteur propre de $A^T A$ avec valeur propre $\lambda_i \Rightarrow \lambda_i \geq 0$ □

①② Garder les valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$ de $A^T A$ et $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ (1 ≤ i ≤ l)

$\therefore \Sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_l & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ m lignes

$\begin{matrix} \text{---} l \text{---} \\ \text{---} l \text{---} \end{matrix}$ n colonnes

$\begin{matrix} \rightarrow l = \text{rang}(A) \\ \quad = \text{rang}(A^T) \end{matrix}$

Exemple 15.9 (début)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

On va calculer la matrice Σ de la SVD:

(i) On note que $A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 153 & 96 \\ 96 & 97 \end{pmatrix}$

Alors

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{9}{16} = \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)\left(\lambda - \frac{9}{4}\right)$$

(ii) On conclut que les valeurs propres de $A^T A$ sont

$$\lambda_1 = \frac{9}{4}, \lambda_2 = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}, \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Alors

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

de (1) (i)

(2) Calcul de la matrice V

On reprend les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ de $A^T A$

On calcule une BON $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de $A^T A$

$$V := [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] \in M_n(\mathbb{R})$$

[RK] Cette base existe car $A^T A$ est symétrique [76]

Exemple 15.9 (suite)

On va calculer la matrice V :

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Pour } \lambda_1 = \frac{9}{4} &\leadsto \underline{F}_{\frac{9}{4}} = \text{Ker} \left(A^T A - \frac{9}{4} I_2 \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{153}{100} - \frac{9}{4} & \frac{96}{100} \\ \frac{96}{100} & \frac{97}{100} - \frac{9}{4} \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{72}{100} & \frac{96}{100} \\ \frac{96}{100} & -\frac{128}{100} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{18}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{32}{25} \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = \frac{4}{3} x_2 \right\} \\ &= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Pour } \lambda_2 = \frac{1}{4} &\leadsto \underline{F}_{\frac{1}{4}} = \text{Ker} \left(A^T A - \frac{1}{4} I_2 \right) = \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{128}{100} & \frac{96}{100} \\ \frac{96}{100} & \frac{72}{100} \end{pmatrix} \\ &= \text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{32}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{18}{25} \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = -\frac{3}{4} x_2 \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Alors une BON de vecteurs propres est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow V = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

③ Calcul de la matrice U

Méthode 1

→ Complétion + GS
pour la deuxième partie

③ i $\bar{u}_j := \frac{A \bar{v}_j}{\sigma_j}, 1 \leq j \leq l$

③ ii Si $l < m$, compléter $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l\} \subseteq \mathbb{R}^m$ en une base $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l, \bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$ et appliquer GS pour obtenir une BON $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l, \bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{R}^m$

$$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_m]$$

Exemple 15.9 (final) $\bar{u}_1 = \frac{A \bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_2 = \frac{A \bar{v}_2}{\sigma_2} = 2 \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{9}{10\sqrt{2}} & \frac{13}{10\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}_S \underbrace{\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}}_{V^T}$$

Dans cette séance on va voir

12.12

77

(i) la décomposition en valeurs singulières (2ème partie)

③ Calcul de la matrice U (suite)

Méthode 2 $\rightarrow$ Méthode directe: BON de $\text{Ker}(A^T)$
 $= \text{Ker}(AA^T)$

③ (i) $\bar{u}_j = \frac{A\bar{v}_j}{\sigma_j}, 1 \leq j \leq l$

③ (ii) Si $l < m$, on calcule une base de
 $\text{Ker}(A^T) \stackrel{[\text{FAIT}]}{=} \text{Ker}(AA^T) : \{\bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\} \subseteq \mathbb{R}^m$

et on applique GS à $\{\bar{w}_{l+1}, \dots, \bar{w}_m\}$
pour obtenir une BON $\{\bar{u}_{l+1}, \dots, \bar{u}_m\}$
de $\text{Ker}(A^T)$.

$$U := [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_l \bar{u}_{l+1} \dots \bar{u}_m]$$

Point important: $\sigma_j = \|A\bar{v}_j\|, \forall 1 \leq j \leq l$!!!

Exemple / Exercice 14.14

On va calculer la SVD de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left. \begin{array}{l} m=3 \\ n=2 \end{array} \right\}$

Alors

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

① On calcule Σ

① ① On calcule les valeurs propres de $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = 2(2-4)$$

$\Rightarrow 4, 0$ sont les valeurs propres de $A^T A$ (chacune a multiplicité 1)

② $4 > 0 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{4} = 2 > 0$

et on pose

$$\Sigma := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} m=3 \\ n=2 \end{array} \right\}$$

✓

② On calcule V

$\rightarrow$ On calcule une BON de $\mathbb{R}_2$ pour chaque 2 valeurs propres de $A^T A$:

• Pour $\lambda=4$

FER

$$\mathbb{F}_4 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = x_2 \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{BON de } E_1 \text{ est } \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}}_{\bar{v}_1}$$

• Pour $\lambda=0$ FER

$$E_0 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{BON de } E_0 \text{ est } \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}}_{\bar{v}_2}$$

On pose donc

$$V := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{m=2} \\ \checkmark \end{matrix}$$

③ On calcule U (On va utiliser la méthode 2) $n=2$

$$\textcircled{5} \textcircled{a} \quad \bar{u}_1 := \frac{A \cdot \bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

⑥ Dans ce cas $\ell(\text{rang}(A)) = 1$ $\leftarrow \# \{ \sigma_j > 0 \} ?$

On calcule donc une base de $\text{Ker}(A^T)$:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 = -x_2 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Or, si l'on applique GS à $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
on trouve la BON de $\text{Ker}(A^T)$:

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{u}_3} \right\}$$

On pose

$$U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_\Sigma \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{V^T} \\
 &= U \Sigma V^T
 \end{aligned}$$

Exemple / Exercice 14.16

On va calculer la SVD de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m=2 \\ n=3 \end{matrix}$$

Alors

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

① On calcule Σ

① ① On calcule les valeurs propres de $A^T A$:

$$\det(A^T A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 10-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda) \left[(10-\lambda)(2-\lambda) - 4 \right]$$

$$-4 \left[(10-\lambda) 4 \right] = -(\lambda-10) \left[\lambda^2 - 12\lambda + 16 - 16 \right] = -(\lambda-12)(\lambda-10) \cdot \lambda$$

$\Rightarrow$ les valeurs propres de $A^T A$ sont 12, 10 et 0

On pose

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} m=2 \\ n=3 \end{matrix} \quad \Downarrow \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix} \sigma_1 = \sqrt{12} \text{ et } \sigma_2 = \sqrt{10} \end{matrix}$$

② On calcule V

$\rightarrow$ Une BON pour chaque E_λ , λ valeur propre de $A^T A$

• Pour $\lambda=12$

F.E.R.

$$E_{12} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{BON de } E_{12} \text{ est } \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

• Pour $\lambda = 10$

FER

$$E_{10} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{BON de } E_{10} : \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{v}_2} \right\}$$

• Pour $\lambda = 0$

FER

$$E_0 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -x_3/5 \\ x_2 = -2x_3/5 \end{matrix} \right\} = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{BON de } E_0 : \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}}_{\bar{v}_3} \right\}$$

On pose

$$V := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

③ On calcule U

③ ① $\bar{u}_1 = \frac{A\bar{v}_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}{\sqrt{12}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\bar{u}_2 = \frac{A\bar{v}_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On pose

$$U := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_U \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{30} & -2/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}}_{V^T} = U \Sigma V^T$$