

Question A (4 points). Soit A une matrice symétrique.

- (a) (1 point) Que dit le Théorème spectral? Dire explicitement ce que cela signifie pour une matrice d'être orthodiagonalisable.
- (b) (3 points) Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de la matrice A . Montrer que les espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Question B (14 points). Dans cet exercice W est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) (2 points) Construire une base orthonormée de W .
- (b) (1 point) Calculer la matrice $B = A^T A$.

(c) (2 points) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice $B = A^T A$.

- (d) (2 points) Identifier les espaces propres de B sachant que le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B , et en utilisant la partie (a).

- (e) (2 points) Calculer une base orthonormée de vecteurs propres de B .

- (f) (3 points) Calculer les matrices U , V et Σ de la décomposition en valeurs singulières $U\Sigma V^T$ de la matrice A .