Partie A. (5 points)

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $W^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à W.

(a) (2 points) Montrer que $W^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

(b) (1 point) Montrer que $W \cap W^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$.

(c) (2 points) Montrer que $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$.

Partie B. (15 points)

On considère les matrices $U = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (3 points) Montrer que U est une matrice orthogonale.
2. Sachant que $U^T A U$ est diagonale,

   (a) (3 points) trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A,

   (b) (3 points) calculer toutes les valeurs propres de A et donner son polynôme caractéristique,

   (c) (3 points) identifier les espaces propres de A,

   (d) (3 points) trouver une matrice diagonale congruente à A.