

Question 33 (4 points). Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = \vec{u} \vec{u}^T$.

1. (1 point) Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur propre de A .
2. (1 point) Calculer la dimension du noyau de A , (justifier chaque affirmation!).
3. (1 point) Identifier le noyau de A comme un certain sous-espace orthogonal.
4. (1 point) Conclure des trois points ci-dessus que A est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Vect}\{\vec{u}\}$.

Question 34 (14 points). (a) (4 points) On considère le sous-espace W de $\mathbb{R}^4$ donné par l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$. Les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ forment une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de W . Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à cette base $\mathcal{B}$ pour construire une base orthogonale de W .

(b) (3 points) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(c) (3 points) Calculer une base orthonormée de chaque espace propre de la matrice A .

(d) (2 points) Construire une base $\mathcal{C}$ et une matrice orthogonale de changement de base $U = (\text{Id})_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}^{an}}$ qui permet de diagonaliser A .

(e) (2 points) Donner la formule de changement de base et la forme diagonale de la matrice congruente à A pour le changement de base du point (d).





