

Exercice 1. Soient

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Déterminer si $\vec{w}$ est dans $\text{Im}A$, dans $\text{Ker}A$ ou bien dans les deux.

Exercice 2. Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de $\text{Ker}C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\vec{x}) = C\vec{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication** : quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)
2. Calculer le rang de A et $\dim \text{Ker}A$.
3. Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Im}A$, $\text{Ker}A$ et $\text{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A .

Exercice 4.

- (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a & 6 \end{pmatrix}$. Calculer le noyau et l'image de A en fonction des valeurs du paramètre réel a . Déterminer quand la matrice A est inversible.

- (b) Calculer le noyau et le rang de la matrice de Vandermonde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ en fonction des valeurs du paramètre réel a .

Exercice 5. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que T est linéaire.
- (b) Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
- (c) Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T .
- (d) Vérifier le résultat de (c) en trouvant une base de $\text{Ker}T$.

Exercice 6.

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

- (a) Vérifier que T est linéaire.
- (b) Trouver la dimension et une base de $\text{Im}T$.
- (c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
- (d) Trouver la dimension et une base de $\text{Ker}T$.
- (e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).

Exercice 7. Soient les vecteurs $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$. La matrice $m \times n$ définie par $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelée “matrice de rang un”. Utiliser la définition du rang pour démontrer que le rang de $\vec{u} \vec{v}^T$ est effectivement 1.

Exercice 8. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\vec{y} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale $\vec{y} = \vec{0}$.

Indication. Utiliser le Théorème du rang.

Exercice 9.

- a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis déduire une formule qui permet de calculer A^{10} .
- b) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$, puis calculer A^{10} en utilisant le point a).

Exercice 10. Choix Multiple et Vrai-faux .

a. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.

- ☐ $\text{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0
- ☐ $\text{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0
- ☐ $\text{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1
- ☐ $\text{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1

b. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

- ☐ Les colonnes de A engendrent le noyau de A^T .
- ☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est égal au sous-espace engendré par les colonnes de A .
- ☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A .
- ☐ La dimension du noyau de A est égale à la dimension du noyau de A^T .

c. Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que :

- ☐ $\dim \text{Ker} A = 2$ et $\dim \text{Im} A \leq 4$
- ☐ $\dim \text{Ker} A = 3$ et $\dim \text{Im} A = 4$
- ☐ $\dim \text{Ker} A = 4$ et $\dim \text{Im} A \leq 2$
- ☐ $\dim \text{Ker} A = 5$ et $\dim \text{Im} A = 2$

d. Soit A la matrice de la projection orthogonale $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur le plan horizontal $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

- ☐ $\dim \text{Ker} A = 1$ et $\dim \text{Im} A = 1$
- ☐ $\dim \text{Ker} A = 2$ et $\dim \text{Im} A = 1$
- ☐ $\dim \text{Ker} A = 1$ et $\dim \text{Im} A = 2$
- ☐ $\dim \text{Ker} A = 2$ et $\dim \text{Im} A = 2$

e. Soit A une matrice inversible de taille 5×5 . Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

- ☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$.
- ☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.
- ☐ Le noyau de A est vide.
- ☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5.

f. Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

- ☐ T n'est pas linéaire.
- ☐ $\dim \text{Ker} T = 1$ et $\dim \text{Im} T = 2$.
- ☐ $\dim \text{Ker} T = 1$ et $\dim \text{Im} T = 1$.
- ☐ $\dim \text{Ker} T = 2$ et $\dim \text{Im} T = 1$.

g. Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par

- ☐ (t) .
- ☐ $(t, 3 + 2t^2)$.
- ☐ $(-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2)$.
- ☐ $(2 - 3t^2)$.