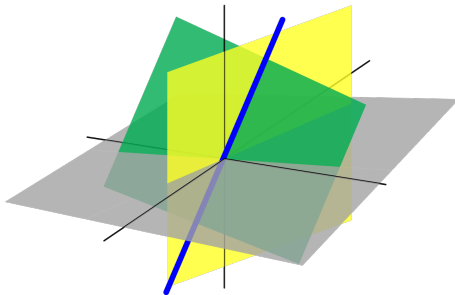


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 19 DÉCEMBRE

Jérôme Scherer



7.4.1 DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

Soit A une matrice $m \times n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée. Alors T transforme la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

en un ellipsoïde de $\mathbb{R}^m$.

REMARQUE

L'étirement est maximal dans la direction de l'espace propre correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice symétrique $B = A^T A$.

LEMME

Soit A une matrice $m \times n$ et $B = A^T A$. Les valeurs propres de B sont positives.

7.4.5 L'IMAGE DE A

Soit A une matrice de taille $m \times n$, $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres unitaires de $B = A^T A$ pour les valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

THÉORÈME

Si A admet exactement r valeurs singulières non nulles, alors $(Av_1, \dots, Av_r)$ est une base orthogonale de l'image de A .

Preuve. $(Av_i) \cdot (Av_j) = \overset{\text{def de}}{v_i^T} A^T \overset{\text{vj vect. propre de B}}{Av_j} = \overset{\text{prop ()}^T}{v_i^T} \lambda_j v_j = 0$ pour $i \neq j$.
 $\swarrow \quad \searrow$
 $v_i \perp v_j$

En particulier $\|Av_i\|^2 = \lambda_i \|v_i\|^2 > 0$ et les vecteurs $Av_1, \dots, Av_r$ sont orthogonaux, donc linéairement indépendants.

Ils engendrent $\text{Im}A$ car $Av_{r+1} = \dots = Av_n = 0$.



7.4.6 DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES

Une **décomposition de A en valeurs singulières** (SVD) est une factorisation $A = U\Sigma V^T$ telle que

❶ U est orthogonale $m \times m$;

❷ V est orthogonale $n \times n$;

❸ $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est de taille $m \times n$.

Les lignes de U et de V sont appelés les **vecteurs singuliers** à gauche et à droite de A .

7.4.6 EXISTENCE DE LA SVD

- ❶ On choisit $V = (\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n)$ où les $\vec{v}_i$ forment une base orthonormée de vecteurs propres de $B = A^T A$, classés dans l'ordre décroissant des valeurs propres λ_i .

- ❷ On pose $\vec{u}_i = \frac{A\vec{v}_i}{\|A\vec{v}_i\|} = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$ pour $1 \leq i \leq r$.

- ❸ On complète en une base orthonormée

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}_m)$ de $\mathbb{R}^m$ et on pose $U = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_m)$.

- ❹ On calcule

$$U\Sigma = (\sigma_1 \vec{u}_1, \dots, \sigma_r \vec{u}_r, \vec{0}, \dots, \vec{0}) = A(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n) = AV.$$

- ❺ $U\Sigma V^T = AVV^T = A.$

$\swarrow \quad \vec{v}^T \vec{v} = \mathbb{I}_n \text{ et } \vec{v}^T = \vec{v}^{-1} \Rightarrow \vec{v} \vec{v}^T = \mathbb{I}_n$

7.4.3 EXEMPLE

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. L'image de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est une ellipse dans $\mathbb{R}^2$.

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = -t(t - 25)(t - 9)$$

$$E_{25} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.4.3 CALCUL, SUITE

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}/2 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

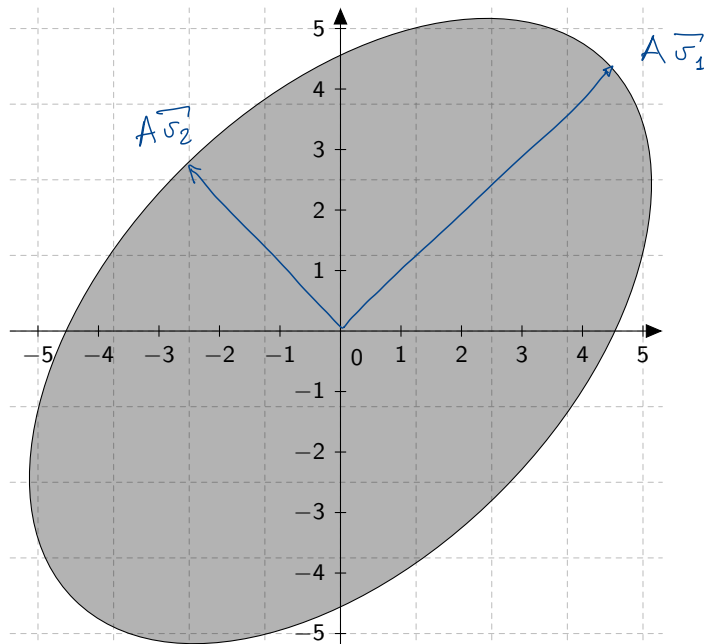
Ce vecteur est l'image par T d'un vecteur unitaire (de la sphère unité). Il est de longueur maximale (5) et correspond au grand axe de l'ellipse ci-dessous.

❶ $\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 0.$

❷ $E_9 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect}\{\vec{v}_2\}$

❸ $A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

7.4.4 GRAND AXE ET PETIT AXE

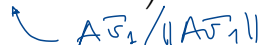


7.4.6 EXEMPLE, FIN

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = A^T A$. Alors $E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\}$.

Donc $V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 & 2/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/6 & -2/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix}$  $A\vec{v}_2 / \|A\vec{v}_2\|$

On connaît déjà $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

et enfin $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.  $A\vec{v}_1 / \|A\vec{v}_1\|$ On a bien $U\Sigma V^T = A$

7.4.7 COMMENTAIRES

- ❶ Fonctionne pour des matrices non diagonalisables, même rectangulaires !
- ❷ Utile pour des applications numériques. Les matrices U et V étant orthogonales, l'estimation de l'erreur ou de l'imprécision est dans Σ uniquement.
- ❸ Utile en statistiques (PCA).
- ❹ Utile pour la compression de données

7.4.7 COMPRESSION DES DONNÉES

Exemple trouvé chez [http ://andrew.gibiansky.com/blog/](http://andrew.gibiansky.com/blog/)

Une photo (d'un tigre) est codée par une matrice A de rang 500.

Chacune des images suivantes est produite en remplaçant la matrice

$$A = U\Sigma V^T$$

par la meilleure approximation possible de rang m , c'est-à-dire

$$U\Sigma_m V^T$$

où Σ_m est la matrice Σ_m est obtenue en ne gardant que les m premières valeurs singulières (les plus grandes) :

7.4.7 COMPRESSION DES DONNÉES

Full-Rank Tiger



Rank 200 Tiger



Rank 100 Tiger



Rank 50 Tiger



Rank 30 Tiger



Rank 20 Tiger



Rank 10 Tiger



Rank 3 Tiger



A.21 CALCULS DANS $\mathbb{F}_{25}$

Soit $\mathbb{F}_5$ le corps à cinq éléments et $\mathbb{F}_5[t]$ l'anneau des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients dans $\mathbb{F}_5$. Soit encore $p(t) = t^2 + t + 1$

et A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{F}_5)$.

(1) (1 point) Montrer que $p(t)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[t]$.

Comme $p(t)$ est de degré 2, il est irréductible si et seulement si il n'a pas de racine. Il suffit de montrer $p(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{F}_5$.

Calculons

$p(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$	donc $p(t)$ est irred.
$p(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3 \neq 0$	
$p(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7 = 2 \neq 0$	
$p(3) = p(-2) = (-2)^2 + (-2) + 1 = 3 \neq 0$	
$p(4) = p(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 \neq 0$	

A.21 CALCULS DANS $\mathbb{F}_{25}$, SUITE $\mathbb{F}_{25} = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{F}_5\}$

- (2) (2 points) Soit $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[t]/(p(t))$, le corps à 25 éléments des restes de la division polynomiale par $p(t)$. Décomposer $p(t)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_{25}[t]$.

Soit $\alpha = [t] \in \mathbb{F}_{25}$. Cet élément est une racine de $p(t) \in \mathbb{F}_{25}[t]$. En effet $\alpha^2 + \alpha + 1 = [t]^2 + [t] + [1] = [t^2 + t + 1] = [p(t)] = 0$.
 (car le reste de la division par $p(t)$ est 0.)

Donc $t - \alpha$ divise $p(t)$. On effectue la division

$$\begin{array}{r|l}
 t^2 + t + 1 & t - \alpha \\
 - (t^2 - \alpha t) & \\
 \hline
 (\alpha + 1)t + 1 & \\
 - ((\alpha + 1)t - \alpha(\alpha + 1)) & \\
 \hline
 1 + \alpha + \alpha^2 = 0 &
 \end{array}$$

Ainsi $t^2 + t + 1 = \underline{\underline{(t - \alpha)(t + \alpha + 1)}}$

A.21 CALCULS DANS $\mathbb{F}_{25}$, SUITE

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) (1 point) A n'est pas diagonalisable dans $M_{2 \times 2}(\mathbb{F}_5)$.

On calcule $C_A(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + t + 1 = p(t).$

Comme $p(t)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[t]$, il n'y a pas de valeur propre dans $\mathbb{F}_5$, A n'est pas diagonalisable.

(4) (4 points) Montrer que A est diagonalisable dans $M_{2 \times 2}(\mathbb{F}_{25})$.

$C_A(t) = t^2 + t + 1$ par (3)
 $= (t - \alpha)(t + \alpha + 1)$ par (2) dans $\mathbb{F}_{25}[t]$
 Les valeurs propres sont les racines de $C_A(t)$, ici α et $-\alpha - 1$. Ces deux valeurs sont de multiplicité algébrique 1, donc leur multiplicité géométrique aussi.

A.21 CALCULS DANS $\mathbb{F}_{25}$, FIN

vaut 1 car

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq \text{mult}(\lambda)$$

Ainsi A est diagonalisable, semblable à $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}$.

Il reste à calculer les espaces propres.

$$\textcircled{1} E_\alpha = \text{Ker}(A - \alpha I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1-\alpha & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 + \alpha L_1 \\ = \end{matrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -1-\alpha & 1 \\ \underbrace{-1+\alpha(-1-\alpha)}_{-1-\alpha-\alpha^2=0} & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\textcircled{2} E_{-\alpha-1} = \text{Ker} \begin{pmatrix} \underbrace{-1+\alpha+1}_\alpha & 1 \\ -1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha \alpha + y = 0 \\ L_2 - \alpha L_1 \end{matrix} = \dots = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres de $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{F}_{25})$.

PROGRAMME DE CETTE ANNÉE (LISTE NON EXHAUSTIVE !)

A. Méthode de Gauss : échelonner

- ➊ Déterminer si un système d'équations est compatible.
- ➋ Déterminer si un système d'équations possède aucune, une ou une infinité de solutions.
- ➌ Déterminer la dimension de la solution générale (nombre de paramètres).
- ➍ Calculer le rang d'une application linéaire.
- ➎ Calculer la dimension du noyau d'une application linéaire.

MÉTHODE DE GAUSS : RÉDUIRE

- ➊ Calculer la solution explicite d'un système d'équations.
- ➋ Calculer explicitement le noyau d'une matrice, en donner une base.
- ➌ Calculer explicitement une base de l'image d'une application linéaire.
- ➍ Inverser une matrice.

OPÉRATIONS SUR LES LIGNES/COLONNES

❶ Calculer un déterminant (linéarité comme fonction d'une ligne ou une colonne).

❷ Calculer une aire ou un volume.

(❸ Factorisation LU .)

❹ Extraire une base d'une famille de vecteurs.

❺ Vérifier qu'une famille de vecteurs est libre.

❻ Compléter en une base une famille de vecteurs libres.

❼ Vérifier qu'une famille de vecteurs est génératrice.

MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soit $T : V \rightarrow W$.

- 1 Choisir une base $\mathcal{B}$ de V et une base $\mathcal{C}$ de W .
- 2 Calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.
- 3 Ce sont les **colonnes** de la matrice de T .
- 4 Exemple : matrice de changement de base (pour $T = Id$).
- 5 Théorème du rang.
- 6 Étude de l'injectivité et de la surjectivité de T

ESPACES VECTORIELS

- ❶ Reconnaître des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_n$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.
- ❷ Travailler avec les sous-espaces : noyau, espace-lignes, espace-colonnes
- ❸ Calcul de la dimension d'un sous-espace

DIAGONALISATION

Soit A une matrice carrée.

- 1 Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .
- 2 Calculer les valeurs propres (réelles ou complexes) et les espaces propres.
- 3 Trouver si possible une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
- 4 Ecrire la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{Can}}$.
- 5 Calculer la matrice de changement de base inverse.
- 6 $D = P^{-1}AP$.

DIAGONALISATION, VARIANTES

- ① Calcul des puissances d'une matrice.
- ② Au lieu de commencer avec une matrice A , construire la matrice de $T : W \rightarrow W$ pour le choix d'une base $\mathcal{B}$ de W .

GRAM-SCHMIDT

- 1 Produit scalaire standard, norme et orthogonalité.
- 2 Formules pour la projection orthogonale (pour une base orthogonale ou orthonormée !)
- 3 Formules pour Gram-Schmidt.
- 4 Méthode des moindres carrées.
- 5 Factorisation QR
- 6 Droite de régression linéaire

ORTHODIAGONALISATION

- ① Matrices orthogonales.
- ② Matrices symétriques et formes bilinéaires.
- ③ Critère d'orthodiagonalisation.
- ④ Théorème spectral

SUJETS PROPRES À CE COURS

(❶ Formules de Cramer)

(❷ Produits scalaires non standards)

(❸ Décomposition en valeurs singulières (SVD))

(❹ Interprétation du Théorème spectral)

❺ Corps finis : le corps $\mathbb{F}_p$ des entiers modulo p *p premier*

❻ Corps finis : construction de $\mathbb{F}_{p^2}$ et $\mathbb{F}_{p^3}$

❼ Corps finis : calcul de produit et d'inverse dans $\mathbb{F}_{p^2}$ et $\mathbb{F}_{p^3}$

❽ Corps finis : algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{F}_{p^2}$