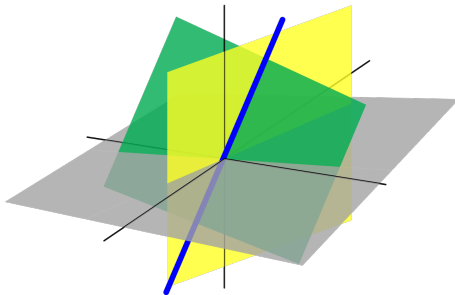


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU MARDI 3 DÉCEMBRE

Jérôme Scherer



6.2.1 FAMILLES ORTHOGONALES

DÉFINITION

Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tous $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Rappel.

- 1 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul :
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$
- 2 Par distributivité du produit scalaire, $\vec{u} \perp \vec{a}$ et $\vec{u} \perp \vec{b}$ implique que $\vec{u} \perp \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

THÉORÈME

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

6.2.2 COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHOGONALE

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base orthogonale de W .

THÉORÈME

Pour tout vecteur $\vec{w} \in W$, on a $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$ et

$$\alpha_j = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}$$

Exemple. On construit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ en commençant avec le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.

La méthode de Gauss nous fournit une base, par exemple, quitte à

amplifier pour éviter des fractions, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.2.2 EXEMPLE

Or, ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux. Pour trouver un vecteur de W orthogonal à $\vec{b}_1$, je peux par exemple le choisir de

la forme $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$, le produit scalaire avec $\vec{b}_1$ vaut bien zéro,

mais il faut encore que $c = 13$ pour que l'équation du plan W soit satisfaite. Ainsi on obtient une base orthogonale de W avec

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$. On ajoute encore

$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp$ pour avoir une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

6.2.2 EXEMPLE, SUITE

$$\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_3$$

La famille ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est

une famille orthogonale de vec-

teurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, elle en forme donc une base. On cherche $(\vec{u})_{\mathcal{B}}$.

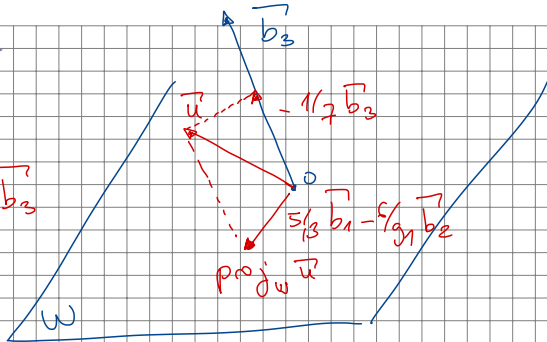
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ On calcule } \vec{u} \cdot \vec{b}_1 = 5, \vec{u} \cdot \vec{b}_2 = -12 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{b}_3 = -2.$$

$$\|\vec{b}_1\|^2 = 13, \quad \|\vec{b}_2\|^2 = 182, \quad \|\vec{b}_3\|^2 = 14$$

$$(\vec{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -12/182 \\ -2/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ -6/91 \\ -1/7 \end{pmatrix}$$

6.2.2 EXAMPLE, FIN

$$\vec{u} = \text{proj}_W \vec{u} + \frac{1}{7} \vec{b}_3$$



6.2.3 MATRICES ORTHOGONALES

THÉORÈME

Les colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthonormées si et seulement si $U^T U = I_n$.

Preuve. Si $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$, alors le coefficient (i, j) de la matrice $U^T U$ est exactement $\vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$. □

DÉFINITION

Une matrice **carrée** U est **orthogonale** si $U^T U = I_n$. Autrement dit $U^{-1} = U^T \iff$ colonnes (et lignes !) de U sont orthonormées.

Une matrice orthogonale représente une transformation linéaire qui préserve les distances et l'orthogonalité (c'est donc une **isométrie** de $\mathbb{R}^n$, par exemple une rotation ou une symétrie).

6.2.4 PRÉSERVATION DES LONGUEURS

THÉORÈME

Soit U une matrice orthogonale. Alors

- ❶ $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ❷ $U\vec{x} \cdot U\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$.
- ❸ $U\vec{x} \perp U\vec{y} \iff \vec{x} \perp \vec{y}$.

Preuve. (2) On calcule $U\vec{x} \cdot U\vec{y}$ avec la définition :

$$(U\vec{x})^T U\vec{y} = \vec{x}^T U^T U\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$$

(1) Lorsque $\vec{x} = \vec{y}$ on trouve $\|U\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ d'où le point 1.

(3) On voit que le produit scalaire $U\vec{x} \cdot U\vec{y}$ est nul si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. □

6.2.4 EXEMPLES

① $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ est orthogonale car $\left\| \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right\| = 1$
et $\left\| \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \right\| = 1$ et $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} = 0$

$$\det A = 1.$$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$ —————, mais $\det B = -1$

③ $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ a des colonnes orthogonales
mais C n'est pas orthogonale.

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \text{ et } C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

les lignes de C ne sont pas orthogonales.

6.2.4 EXEMPLES, FIN

$$\textcircled{4} \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix}$$

les colonnes de D
sont orthonormées

$$\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = 0$$

$$\|\vec{d}_1\| = 1 = \|\vec{d}_2\|$$

$\triangle D$ n'est pas orthogonale car elle n'est pas carrée.

$$D^T \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\text{mais } D \cdot D^T = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

6.2.4 CAVEAT

ATTENTION !

Si U est orthogonale, alors aussi $UU^T = I_n$. Mais

- ❶ si A est carrée avec $A^T A$ diagonale, AA^T n'est pas diagonale en général ;
- ❷ si A n'est pas carrée avec $AA^T = I_n$, alors $A^T A \neq I_m$ en général.

Si U est • carrée

• colonnes sont orthonormées

Alors $U^T \cdot U = I_n$, si bien que $U^T = U^{-1}$

et $U \cdot U^T = U \cdot U^{-1} = I_n$.

□

6.2.5 EXEMPLES

- ❶ Les matrices de réflexion sont orthogonales.
- ❷ Les matrices de rotation sont orthogonales.

❸ $U = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 36 & 48 & -80 \\ -80 & 60 & 0 \\ 48 & 64 & 60 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

C'est en fait la matrice d'une rotation d'axe $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et
d'angle $73,8^\circ$, pour le voir il faut diagonaliser U , sur $\mathbb{C}$!

6.2.5 EXEMPLE

$$c_u(t) = -t^3 + \frac{156}{100} t^2 - \frac{156}{100} t + 1$$

$$= -(t-1)\left(t - \frac{7}{25} - \frac{24}{25}i\right)\left(t - \frac{7}{25} + \frac{24}{25}i\right)$$

$$E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \frac{7}{25} = \cos(73,8^\circ)$$

$$\frac{24}{25} = \sin(73,8^\circ)$$

$$U \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 7/25 & -24/25 \\ 24/25 & 7/25 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

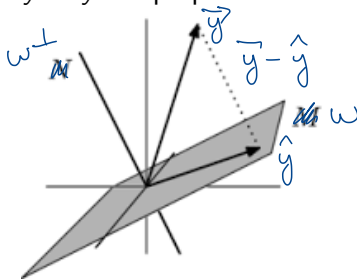
rotation de $73,8^\circ$.

6.3.1 PROJECTION ORTHOGONALE

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ dont on dispose d'une base orthogonale $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$.

Pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ on cherche

- le vecteur $\hat{y} \in W$ tel que
- le vecteur $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$ est perpendiculaire à W .



6.3.1 CONSTRUCTION DE LA PROJECTION

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base orthogonale de W , sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME

Tout vecteur $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ où $\hat{y} \in W$ et $\vec{z} \in W^\perp$.

Preuve. Pour l'unicité, supposons que $\hat{y} + \vec{z} = \vec{y} = \hat{y}' + \vec{z}'$.
 (Handwritten notes: $\hat{y} \in W$, $\vec{z} \in W^\perp$, $\hat{y}' \in W$, $\vec{z}' \in W^\perp$)

Alors $\hat{y} - \hat{y}' = \vec{z}' - \vec{z}$ est un vecteur de W et $W^\perp$. Il est donc nul, car orthogonal à lui-même : $\hat{y} = \hat{y}'$ et $\vec{z}' = \vec{z}$.

Pour démontrer l'existence, il suffit de poser

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k$$

6.3.1 FIN DE LA PREUVE

La formule montre que $\hat{y} \in \text{Vect}\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\} = W$
Il reste à montrer que $\bar{y} - \hat{y} = \bar{z} \in W^\perp$, donc
que $(\bar{y} - \hat{y}) \cdot \bar{u}_i = 0 \quad \forall \quad 1 \leq i \leq k$. On calcule

$$(\bar{y} - \hat{y}) \cdot \bar{u}_i \stackrel{\text{distr.}}{=} \bar{y} \cdot \bar{u}_i - \left(\frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|^2} \bar{u}_1 + \dots + \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_k}{\|\bar{u}_k\|^2} \bar{u}_k \right) \cdot \bar{u}_i$$

$$\stackrel{\text{distr.}}{=} \bar{y} \cdot \bar{u}_i - \frac{\bar{y} \cdot \bar{u}_i}{\|\bar{u}_i\|^2} \underbrace{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i}_{\|\bar{u}_i\|^2}$$

si $j \neq i \quad \bar{u}_j \cdot \bar{u}_i = 0$

$$= \bar{y} \cdot \bar{u}_i - \bar{y} \cdot \bar{u}_i = 0.$$

□

6.3.2 OBSERVATION

Pour calculer la projection orthogonale $\text{proj}_W \vec{y} = \hat{y}$ de $\vec{y}$ sur W , il faut connaître une base orthogonale de W , mais il n'est pas nécessaire d'avoir une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ en entier.

Exemple. (Lay, Ex. 6.3.2, page 381). Soit

$$W = \text{Vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_3} \right) \text{ et } \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On cherche $\hat{y} = \text{proj}_W \vec{y}$.

6.3.2 EXEMPLE

$$\|\vec{u}_1\|^2 = 7 = \|\vec{u}_2\|^2 = \|\vec{u}_3\|^2$$

On vérifie que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3$.

$$\begin{aligned}\hat{y} = \text{proj}_W \vec{y} &= \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|^2} \vec{u}_3 \\ &= \frac{3}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{12}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{8}{7} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\vec{y} - \hat{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que ce vecteur est dans $W^\perp$ en calculant les produits scalaires avec les $\vec{u}_i$:
Ils sont nuls.

Bonne: $W^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

6.3.2 MÉTHODE

- ❶ Vérifier que la base de W est orthogonale ! I.e. $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ pour $i \neq j$.
- ❷ Calculer les normes **au carré** des vecteurs de base $\vec{u}_i$.
- ❸ Calculer les produits scalaires $\vec{y} \cdot \vec{u}_i$.
- ❹ Calculer la projection

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k$$

- ❺ Calculer $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$ et **vérifier** que $\vec{z} \perp W$.
- ❻ **Remarque.** Si $\vec{y} \in W$, alors $\hat{y} = \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{0}$.

6.3.3 PROJECTION, CAS D'UNE BASE ORTHONORMÉE

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base **orthonormée** de W , alors tous les $\vec{u}_i$ sont unitaires et

formule ci-dessus

$$\text{proj}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k$$

*def. du produit
scalaire*

$$= (\vec{u}_1^T \vec{y}) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{u}_k^T \vec{y}) \vec{u}_k$$

*def. du produit
matriciel.*

$$= U \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{y} \\ \vdots \\ \vec{u}_k^T \vec{y} \end{pmatrix} = UU^T \vec{y}$$

*⚠ $U^T U = I_{\mathbb{R}}$
 $U U^T$ est
la matrice de
 proj_W .*

THÉORÈME

Soit U la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ d'une base **orthonormée** de W . Alors

$$\boxed{\text{proj}_W \vec{y} = UU^T \vec{y}}.$$

6.3.4 APPROXIMATION QUADRATIQUE

La distance minimale entre un vecteur $\vec{y}$ et un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$ est réalisée par $\vec{z} = \vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$.

THÉORÈME

Pour tout $\vec{w} \in W$ on a $\|\vec{y} - \vec{w}\| \geq \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|$.

On appelle ce vecteur $\hat{y}$ la meilleure approximation **quadratique** de $\vec{y}$ dans W dans le sens où elle minimise le carré de la distance qui est calculée par la somme des carrées des coordonnées.

Preuve. L'idée est d'écrire un vecteur $\vec{w}$ de W de manière compliquée : $\vec{w} = \hat{y} + (\vec{w} - \hat{y})$, si bien que

$$\vec{y} - \vec{w} = \vec{y} - \hat{y} - (\vec{w} - \hat{y})$$

Or $\vec{y} - \hat{y} = \vec{z}$ est dans $W^\perp$ et $\vec{w} - \hat{y} \in W$.

6.3.4 PREUVE ET EXEMPLE

On applique Pythagore :

$$\|\vec{y} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{y} - \hat{\vec{y}}\|^2 + \underbrace{\|\vec{w} - \hat{\vec{y}}\|^2}_{\geq 0} \geq \|\vec{y} - \hat{\vec{y}}\|^2. \quad \square$$

Exemple. W : plan $x+y+z=0$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \dots, \hat{\vec{y}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} - \hat{\vec{y}} = \vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in W^\perp = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$d(\vec{y}, W) = \|\vec{z}\| = \underline{\underline{4\sqrt{3}}} \quad \text{distance de } \vec{y} \text{ au plan } W.$$

6.4.0 GRAM ET SCHMIDT



Gram (1850 - 1916) et Schmidt (1876 - 1959).

6.4.1 LE PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT

But. Trouver une base orthogonale ou orthonormée d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$.

Idée. Utiliser de manière inductive les projections orthogonales. On considère dans $\mathbb{R}^4$ l'hyperplan W donné par l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

- ❶ On cherche d'abord une base, par exemple celle proposée par la méthode de Gauss :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$= \underline{b_1} \quad = \underline{b_2} \quad = \underline{b_3}$

6.4.1 PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT, SUITE

On garde $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$. On projette $\vec{b}_2$ sur $\text{Vect}(\vec{c}_1)$
et on choisira $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \hat{\vec{b}}_2$.

$$\text{Ici } \text{proj}_{\text{Vect}(\vec{b}_1)} \vec{b}_2 = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{\|\vec{b}_1\|^2} \vec{b}_1 = \frac{2}{5} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \hat{\vec{b}}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{proj}_{\text{Vect}(\vec{c}_1, \vec{c}_2)} \vec{b}_3 \quad \text{et } \vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \hat{\vec{b}}_3.$$