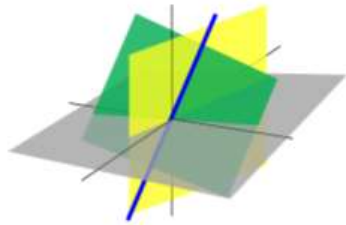


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 12 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



4.7.3 EXEMPLE, SUITE

On échelonne donc :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & -10 & 9 \end{array} \right]$$

ce qui signifie que $9\vec{c}_1 - 10\vec{c}_2 = \vec{b}_1$ et $-8\vec{c}_1 + 9\vec{c}_2 = \vec{b}_2$.

Nous avons trouvé les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$. Ainsi la matrice de changement de base

$$P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -10 & 9 \end{bmatrix} \text{ et donc } (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det P}$$

$$\det P = 9^2 - 10 \cdot 8 = 1$$

4.7.3 ENCORE UN EXEMPLE

On travaille dans l'espace vectoriel W des matrices symétriques de taille 2×2 (telles que $A = A^T$). Ainsi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

On considère deux bases $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ et $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22}) = (B_1, B_2, B_3)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (C_1, C_2, C_3)$$

4.7.3 ENCORE UN EXEMPLE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (C_1)_{\mathcal{B}}$$

$$C_1 = B_1 + B_3, \quad C_2 = -B_1 + B_3, \quad C_3 = B_2$$

$$\left((C_1)_{\mathcal{B}}, (C_2)_{\mathcal{B}}, (C_3)_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P$$

$(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = P^{-1}$ se calcule avec la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_1 + L_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.7.4 DOUBLE CHANGEMENT DE BASE

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ trois bases de V .

$$(Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$$

Preuve. La composition $(V, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (V, \mathcal{C}) \xrightarrow{Id} (V, \mathcal{D})$ est l'identité. La multiplication matricielle correspond à la composition.

Explicitement :

$$(Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \underbrace{(Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{B}}}_{(x)_{\mathcal{C}}} = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(x)_{\mathcal{C}} = (x)_{\mathcal{D}} \quad \square$$

REMARQUE

C'est donc un cas particulier de la formule de matrice d'une composition d'applications linéaires.

5.1.0 MOTIVATION

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

OBJECTIF

Trouver une base $\mathcal{B}$ de V telle que $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ soit facilement compréhensible.

5.1.0 MOTIVATION

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

OBJECTIF

Trouver une base $\mathcal{B}$ de V telle que $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ soit facilement compréhensible.

Pour comprendre comment la matrice de T est modifiée lorsque la base change, les matrices de changement de base interviennent.

5.1.0 MOTIVATION, SUITE

Alors

$$A = (f)_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Mais qui donc est cette application f ? On "se rend compte" que certains vecteurs sont **fixés** par f alors que d'autres sont **renversés**.

5.1.0 MOTIVATION, SUITE

Alors

$$A = (f)_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Mais qui donc est cette application f ? On "se rend compte" que certains vecteurs sont **fixés** par f alors que d'autres sont **renversés**.

Autrement dit

- il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\vec{x} = \vec{x}$;

5.1.0 MOTIVATION, SUITE

Alors

$$A = (f)_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Mais qui donc est cette application f ? On "se rend compte" que certains vecteurs sont **fixés** par f alors que d'autres sont **renversés**.

Autrement dit

- il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\vec{x} = \vec{x}$;
 ex: $\exists \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\vec{x} = -\vec{x}$.
 ex: $\exists \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.1.0 MOTIVATION, SUITE

① On cherche $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tq $f(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = I_3\vec{x}$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} - I_3\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(A - I_3)$

Calculons ce noyau.

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 \cdot (-1)}]{L_1 \cdot 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker}(A - I_3)$ est le plan W d'équation $x + y - z = 0$

$$W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \}$$

5.1.0 MOTIVATION, SUITE

② On cherche $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tq $f(\vec{x}) = -\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = -\vec{x} = -I_3\vec{x}$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} + I_3\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow (A + I_3)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(A + I_3)$

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}]{L_1 \cdot 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_1 \cdot (-1)}]{L_2 \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(A + I_3) \text{ est la droite } D = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \{ \vec{b}_3 \}$$

③ Au final on a trouvé trois vecteurs linéairement indépendants (à vérifier, mais toujours le cas) qui forment une base

5.1.0 CONCLUSION

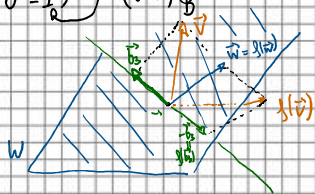
$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
 On a vu que $f(\vec{b}_1) = \vec{b}_1$ $f(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$ $f(\vec{b}_3) = -\vec{b}_3$

$$(f)_{\text{can}}^{\text{can}} = A \quad (f)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (f(\vec{b}_i))_B$$

f est la symétrie qui fixe W dans la direction D .

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{b}_3$$

$$f(\vec{v}) = f(\vec{w}) + f(\vec{b}_3) = \vec{w} - \vec{b}_3$$



La matrice de f dans la base nouvelle B est **diagonale** !

- ① Elle est plus parlante **géométriquement**.
- ② Elle est plus facile à manipuler **algébriquement**, par exemple pour calculer ses puissances.

5.1.1 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

DÉFINITION

Un vecteur non nul $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A s'il existe un nombre λ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. On appelle alors λ une valeur propre de A . L'espace propre E_λ est formé de TOUS les vecteurs $\vec{x}$ tels que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Attention ! Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$. Il est crucial de demander que $\vec{x}$ soit non nul ! Une valeur propre est une denrée rare ! Par contre $\vec{0} \in E_\lambda$.

DÉFINITION

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire. Un vecteur non nul $x \in V$ est un vecteur propre de T si $T(x) = \lambda x$.

5.1.2 COMPARAISON

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

5.1.2 COMPARAISON

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

Soit $A = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.

5.1.2 COMPARAISON

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

Soit $A = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.

PROPOSITION

Un vecteur x est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ si et seulement si $(x)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur propre de A pour la même valeur propre λ .

Preuve. $A(x)_{\mathcal{B}} = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(x)_{\mathcal{B}} = (T(x))_{\mathcal{B}}$.

Ainsi $T(x) = \lambda x$ si et seulement si $A(x)_{\mathcal{B}} = \lambda(x)_{\mathcal{B}}$ $\square$

5.1.2 EXEMPLE

Soit $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt) = -a + 3b + (2a + 4b)t$$

$$\text{Can} = \{1, t\}. \quad T(1) = -1 + 0t, \quad T(t) = 3 + 4t$$

$$(T(1))_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (T(t))_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } (T)_{\text{can}}^{\text{can}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

On cherche, avec un peu de chance, que

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ est de rang 1}$$

$A + 2I_2$ a un noyau non-trivial, de dim 1 (thm rang)

donné par $\text{Ker} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A $\left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

$$(1 + 2t) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

5.1.1 EXEMPLE, SUITE

Essayons de voir ce qui se passe avec la nouvelle base

$$\mathcal{B} = \{-3 + t, t\} = \{p_1, p_2\} \text{ de } \mathbb{P}_1$$

$$T(p_1) = -2p_1 \quad T(p_2) = T(t) = 3 + 4t = -(-3 + t) + 5t = -1 \cdot p_1 + 5 \cdot p_2$$

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = B \text{ pas encore diagonale, mais triangulaire!}$$

$$((T(p_1))_{\mathcal{B}}, (T(p_2))_{\mathcal{B}})$$

Cela nous aide à voir que 5 est aussi une valeur propre car

$$\text{Ker}(B - 5I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Ker} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B , la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$, donc $-1 \cdot p_1 + 7 \cdot p_2 = 3 + 6t$ est un vecteur propre de T .

Mais aussi $1 + 2t$ est aussi un vecteur propre de T .

5.1.1 EXEMPLE, SUITE

On choisit $\mathcal{C} = (-3+it, 1+it) = (q_1, q_2)$, composée de vecteurs propres

$$\text{tg } T(q_1) = -2 \cdot q_1 \quad T(q_2) = 5 \cdot q_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} \text{ est diagonale}}$$

5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

PROPOSITION

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I_n$ est non nul.

5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

PROPOSITION

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I_n$ est non nul.

Preuve. Si λ est valeur propre de A , il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Autrement dit

5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

PROPOSITION

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I_n$ est non nul.

Preuve. Si λ est valeur propre de A , il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Autrement dit

$$\vec{0} = A\vec{x} - \lambda\vec{x} = A\vec{x} - \lambda I_n \vec{x} = (A - \lambda I_n) \vec{x}$$

par distributivité de la multiplication matricielle. Ainsi un vecteur propre est une solution non nulle de l'équation homogène $(A - \lambda I_n) \vec{x} = \vec{0}$.

5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

PROPOSITION

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I_n$ est non nul.

Preuve. Si λ est valeur propre de A , il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Autrement dit

$$\vec{0} = A\vec{x} - \lambda\vec{x} = A\vec{x} - \lambda I_n \vec{x} = (A - \lambda I_n) \vec{x}$$

par distributivité de la multiplication matricielle. Ainsi un vecteur propre est une solution non nulle de l'équation homogène $(A - \lambda I_n) \vec{x} = \vec{0}$. En conclusion un vecteur propre existe pour λ si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est non nul. $\square$

5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

REMARQUE

Chercher une valeur propre λ de la matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ revient à chercher un nombre λ tel que $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension ≥ 1 .

Par le Théorème du rang, ceci revient à chercher λ avec $\text{rang}(A - \lambda I_n) < n$, ou encore **$A - \lambda I_n$ non inversible.**