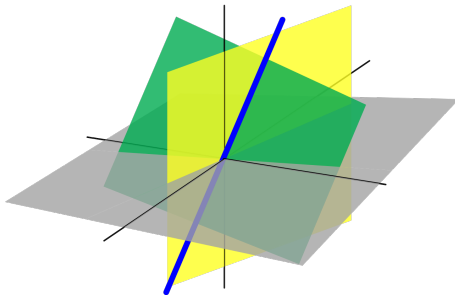


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 7 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



5.4.1 UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures, avec la base choisie $\mathcal{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{22})$.

On considère $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$(T(p))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(-1) \\ p(2) \end{pmatrix} \quad T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(2) \end{pmatrix} = p(1) \cdot e_{11} + p(-1) \cdot e_{12} + p(2) \cdot e_{22}$$

En choisissant la base canonique $\mathcal{Can} = (1, t, t^2)$ on identifie $\mathbb{P}_2$ avec $\mathbb{R}^3$ et en choisissant la base ci-dessus de W on identifie W avec $\mathbb{R}^3$ également.

Pour associer à T une matrice on calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{Can}$ et on les exprime en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

5.4.1 LES IMAGES DES VECTEURS DE BASE

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_1 \text{ et } (W_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = W_2 \text{ et } (W_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = W_3 \text{ et } (W_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

But : Calculer l'image par T du polynôme $1 - t + 3t^2$, de deux manières.

5.4.1 LA MATRICE DE T

On représente T , après avoir choisi les bases $\mathcal{Can}$ de $\mathbb{P}_2$ et $\mathcal{B}$ de W , par la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de la base $\mathcal{Can}$ exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = (T)_{\mathcal{Can}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T(1-t+3t^2) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (1-t+3t^2)_{\mathcal{Can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$



5.4.2 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

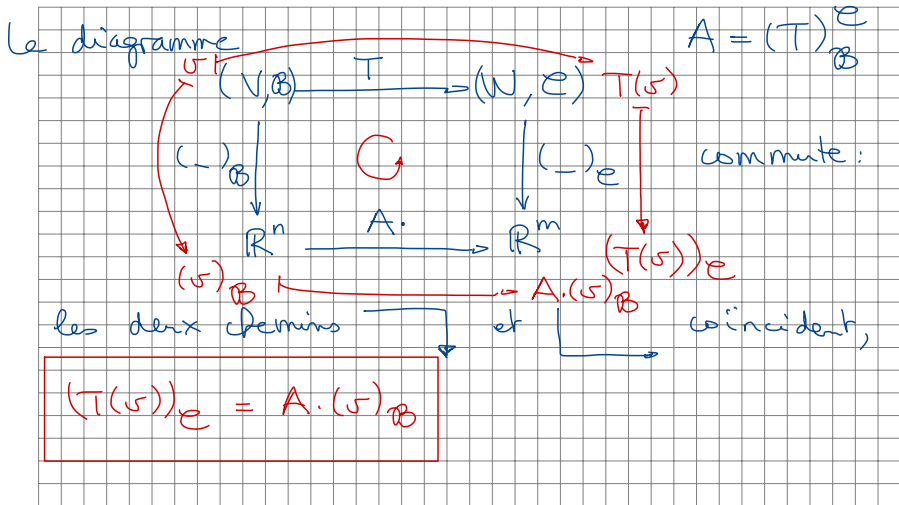
On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

5.4.2 ILLUSTRATION.

Cette formule dit en fait que les deux chemins possibles pour aller d'un coin à l'autre du carré suivant donnent le même résultat :



5.4.2 PREUVE.

Soit $v \in V$ et $(v)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On calcule

$$A \cdot (v)_B = (T)_B^e \cdot (v)_B = (T(e_1)_e \dots T(e_n)_e) (v)_B$$

$$\stackrel{\text{def de } \cdot}{=} x_1 \cdot T(e_1)_e + \dots + x_n \cdot T(e_n)_e$$

$$\stackrel{\text{linéarité de } (\cdot)_e}{=} (x_1 \cdot T(e_1) + \dots + x_n \cdot T(e_n))_e$$

$$\stackrel{T \text{ linéaire}}{=} (T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n))_e$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_v$ par def de $(\cdot)_B$

$$= (T(v))_e$$

□

5.4.2 UN CAS CONNU

REMARQUE

Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ et que les bases choisies sont les bases canoniques, la matrice d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la matrice de T au sens du chapitre 1.9.

En effet $(T)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{C}_{an}}$ est par définition la matrice dont les colonnes sont les images $T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)$, exprimées en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{C}_{an}$. Or, les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^m$ par rapport à la base canonique sont simplement ses coefficients.

5.4.2 EXEMPLE : UNE ROTATION

Soit $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\pi/2$.

Nous connaissons $(r)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais, si on choisit la base canonique pour l'espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^2$, et à l'arrivée la nouvelle base $\mathcal{C}$ donnée par

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{r(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 \quad \text{et} \quad r(\vec{e}_2) = \vec{f}_2}$$

$$(\underbrace{r(e_1)}_{\mathcal{C}} \underbrace{r(e_2)}_{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}} = (r)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

5.4.2 CONCLUSION

On perd trop d'information lorsqu'on permet de choisir des bases arbitraires au départ et à l'arrivée.

FAIT

La seule information qui reste est le **rang** de l'application linéaire : deux matrices de même taille et de même rang représentent la même application linéaire.

DÉCISION

Pour étudier des applications linéaires $T : V \rightarrow V$ nous choisirons une seule base de V , la même pour l'espace vectoriel de départ et d'arrivée.

But. Trouver la meilleure base pour comprendre T .

4.7.1 CHANGEMENT DE BASE

- V est un espace vectoriel,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V ,
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de V .

DÉFINITION

La matrice de **changement de base** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est la matrice $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont $(e_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (e_n)_{\mathcal{C}}$.

La matrice de changement de base est donc la matrice de l'application linéaire identité, mais pour des choix différents en général de base au départ et à l'arrivée. Ici $Id_V(e_i) = e_i$.

Question. Pourquoi cette matrice mérite-t-elle le nom de matrice de *changement de base*?

4.7.2 THÉORÈME DU CHANGEMENT DE BASE

La matrice de changement de base permet de calculer les coordonnées dans la **nouvelle base** $\mathcal{C}$ si on connaît celles dans l'**ancienne base** $\mathcal{B}$.

THÉORÈME

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

Preuve. Cela découle du résultat plus général démontré ci-dessus !

En effet

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Id_V(v))_{\mathcal{C}} = (v)_{\mathcal{C}}$$



$$\text{Id}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

4.7.2 EXEMPLE. ① $(\text{Id})_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} = I_2 = (\text{Id})_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$

② $\mathcal{E}_{\text{can}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (\overline{b}_1, \overline{b}_2)$
 car " $e_i = e_i$ ".

$$P = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} = \left((\overline{b}_1)_{\mathcal{E}_{\text{can}}} \quad (\overline{b}_2)_{\mathcal{E}_{\text{can}}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Plus dir $Q = (\text{Id})_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{B}} = \left((\overline{e}_1)_{\mathcal{B}} \quad (\overline{e}_2)_{\mathcal{B}} \right)$

Or $\overline{e}_1 = \frac{1}{2} \overline{b}_1 + \frac{1}{2} \overline{b}_2$ et $\overline{e}_2 = \frac{1}{2} \overline{b}_1 - \frac{1}{2} \overline{b}_2$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ici $Q = P^{-1}$ $(\text{Id})_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{B}} = \left((\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} \right)^{-1}$

car la multiplication matricielle correspond à la composition.

$$P \cdot Q = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}} \cdot (\text{Id})_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{B}} = I_2 = (\text{Id})_{\mathcal{E}_{\text{can}}}^{\mathcal{E}_{\text{can}}}$$

5.4.2 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

5.4.3 LA COMPOSITION

- ❶ Soit U un espace vectoriel munis d'une base $\mathcal{B}$,
- ❷ soit V un espace vectoriel munis d'une base $\mathcal{C}$, et
- ❸ soit W un espace vectoriel munis d'une base $\mathcal{D}$.
- ❹ Soit $S : U \rightarrow V$ une application linéaire, et
- ❺ soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

PROPOSITION

Les matrices $(T \circ S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ et $(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot (S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont égales.

La raison en est que la multiplication matricielle a été définie pour qu'elle corresponde à la composition !

5.4.3 PREUVE $(U, \mathcal{B}) \xrightarrow{S} (V, \mathcal{C}) \xrightarrow{T} (W, \mathcal{D})$

$$A = (S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \quad \begin{array}{c} (-)_{\mathcal{B}} \downarrow \\ \mathbb{R}^m \end{array} \xrightarrow{A \cdot} \begin{array}{c} \mathbb{C} \quad (-)_{\mathcal{C}} \downarrow \\ \mathbb{R}^n \end{array} \xrightarrow{B \cdot} \begin{array}{c} \mathbb{D} \quad (-)_{\mathcal{D}} \downarrow \\ \mathbb{R}^r \end{array}$$

$$B = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$$

Calculons

Théorème
préc.

$$\begin{aligned} \text{L} \rightarrow \quad \underline{B \cdot A \cdot (u)}_{\mathcal{B}} &= (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \underbrace{(S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} (u)}_{(S(u))_{\mathcal{C}}} = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot (S(u))_{\mathcal{C}} \\ &\stackrel{\text{aussi}}{=} (T(S(u)))_{\mathcal{D}} = ((T \circ S)(u))_{\mathcal{D}} \\ &= (T \circ S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} (u)_{\mathcal{B}} = \underline{C \cdot (u)}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

L'égalité $B \cdot A \cdot (u)_{\mathcal{B}} = C \cdot (u)_{\mathcal{B}}$ est vraie pour tout $u \in U$, en particulier pour $b_i \in \mathcal{B}$

$$\left. \begin{aligned} C \cdot (b_i)_{\mathcal{B}} &= C \cdot \vec{e}_i = i^{\text{e}} \text{ colonne de } C \\ (B \cdot A) \cdot (b_i)_{\mathcal{B}} &= i^{\text{e}} \text{ colonne de } B \cdot A \end{aligned} \right\} B \cdot A = C$$

□

5.4.3 EXEMPLE

- 1 Soit h une homothétie de rapport 3 dans $\mathbb{R}^3$ et
- 2 p la projection orthogonale sur le plan π d'équation $x + y + z = 0$.
- 3 $T = p \circ h$.

RAPPEL : DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

La distance de (x_0, y_0, z_0) au plan $ax + by + cz = 0$ vaut

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan $ax + by + cz = 0$.

5.4.3 EXEMPLE, SUITE.

Dans la base canonique $\mathcal{C}an$ la matrice $H = (h)_{\mathcal{C}an}^{can}$ est diagonale avec des 3 dans la diagonale. Pour trouver la matrice P de p , dans $\mathcal{C}an$ on calcule les projections des vecteurs de cette base.

Il existe $\vec{u} \perp \pi$ tq $p(\vec{e}_1) + \vec{u} = \vec{e}_1$

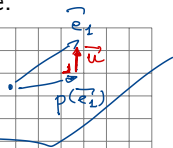
$$\vec{u} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } p(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \pi$$

Donc ce vecteur vérifie $x + y + z = 0$:

$$(1 - \alpha) - \alpha - \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{1}{3} \text{ et}$$

$$p(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \text{ de même } p(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, p(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$



5.4.3 EXEMPLE : LA MATRICE A DE f

$$(P)_{e_B}^{e_B} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = P$$

$$\text{La matrice } A = (f)_{e_B}^{e_B} = P \cdot H = \dots = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

• Le rang de A est 2 car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$

et on voit que $\text{rang } A > 1$ car les lignes ne sont pas proportionnelles (et par le Théorème du rang).

5.4.3 UNE MEILLEURE BASE.

dans π

$$\text{Soit } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

$$\begin{aligned} (f \circ h)(\vec{b}_1) &= p(h(\vec{b}_1)) = p(3\vec{b}_1) = 3\vec{b}_1 & \vec{b}_1 \in \pi \\ (f \circ h)(\vec{b}_2) &= 3\vec{b}_2 & \text{et} \\ (f \circ h)(\vec{b}_3) &= p(3\vec{b}_3) = \vec{0} & \vec{b}_3 \perp \pi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} f \\ \pi \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique de f est plus transparente dans cette base. On voit que f dilate les vecteurs $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$ d'un facteur 3 et envoie $\vec{b}_3$ sur zéro.

4.7.1, 4.7.2 CHANGEMENT DE BASE, RAPPEL

- V est un espace vectoriel,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V ,
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de V .

DÉFINITION

La matrice de **changement de base** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est la matrice $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont $(e_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (e_n)_{\mathcal{C}}$.

La matrice de changement de base permet de calculer les coordonnées dans la **nouvelle base** $\mathcal{C}$ si on connaît celles dans l'**ancienne base** $\mathcal{B}$.

THÉORÈME

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

4.7.3 INVERSE DE CHANGEMENT DE BASE

THÉORÈME

$$\left((Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right)^{-1} = (Id_V)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

Preuve. La matrice $P = (Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est inversible car ses colonnes sont linéairement indépendantes (base). On sait aussi que

$$P(x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$$

Multiplions cette égalité à gauche par P^{-1} :

$$(x)_{\mathcal{B}} = P^{-1}P(x)_{\mathcal{B}} = P^{-1}(x)_{\mathcal{C}}$$

Ainsi P^{-1} transforme un vecteur en coordonnées dans $\mathcal{C}$ en coordonnées dans $\mathcal{B}$! □

4.7.3 EXEMPLE

On considère les bases $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On écrit la matrice “doublement augmentée” pour résoudre deux systèmes à la fois :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right]$$

car on cherche à savoir comment exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{C}$.

4.7.3 EXEMPLE, SUITE

$$\underbrace{L_2 - L_2 L_1}_{\text{red wavy line}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -9 \end{array} \right] \xrightarrow[\underbrace{(-1)L_2}_{\text{red wavy line}}]{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & -10 & 9 \end{array} \right]$$

$$\vec{b}_1 = 9 \cdot \vec{c}_1 - 10 \vec{c}_2$$

$$(\vec{b}_1)_e = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{b}_2)_e = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Id})_{\mathcal{B}}^e = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$$