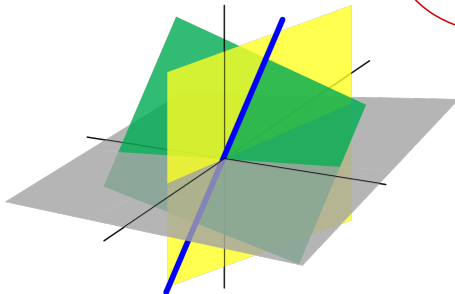


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 5 NOVEMBRE

Jérôme Scherer

ttpoll.eu
463056



4.6.1 REMARQUE IMPORTANTE

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

THÉORÈME

$$\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$$

- 1 Le nombre de lignes linéairement indépendantes est égal au nombre de lignes contenant un pivot.
- 2 Le nombre de colonnes linéairement indépendantes est égal au nombre de colonnes contenant un pivot.
- 3 En résumé, $\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$ car les deux dimensions coïncident avec le nombre de pivots !

4.6.1. LE CAS D'UNE MATRICE 2×2 .

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\dim \text{Lgn } A = 0 = \dim \text{Col } A$.

Supposons que $A \neq 0$; alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si

les deux colonnes sont proportionnelles, $\dim \text{Col } A = 1$.

On peut supposer que $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda c \end{pmatrix}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix}.$$

1^{er} cas: $a = 0$, aussi $\lambda a = 0$ et comme $A \neq 0$, $\dim \text{Lgn } A = 1$
car la 2^e ligne est non nulle.

2^e cas: $a \neq 0$ $\begin{pmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{pmatrix}$ a deux lignes
proportionnelles

car $\begin{pmatrix} c & \lambda c \end{pmatrix} = \frac{c}{a} \cdot \begin{pmatrix} a & \lambda a \end{pmatrix}$. Ici aussi
 $\dim \text{Lgn } A = 1$.

4.6.2 LE RANG

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies.

DÉFINITION

Le **rang** de T est la dimension de l'image de T :

$$\text{rang } T = \dim \text{Im } T.$$

Soit A une matrice $m \times n$, représentant une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

DÉFINITION

Le **rang** de A est la dimension de l'image de A : $\text{rang } A = \dim \text{Im } A$.

THÉORÈME DU RANG

$$\text{rang } T + \dim \text{Ker } T = \dim V$$

4.6.2. PRÉPARATIFS.

On se ramène au cas d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, représentée par $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

① On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V
 $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ de W

② On considère la composition suivante

$$\begin{array}{c} S: \mathbb{R}^n \xrightarrow{(-)^{-1}_{\mathcal{B}}} V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{(-)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}} \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \xrightarrow{T} T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \xrightarrow{(-)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}} (T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n))^{\mathcal{C}} \end{array}$$

4.6.2 LE THÉORÈME DU RANG

THÉORÈME

$$\text{rang } T + \dim \text{Ker } T = \dim V$$

- ❶ Grâce aux coordonnées on identifie V avec $\mathbb{R}^n$ et W avec $\mathbb{R}^m$.
- ❷ Ainsi on identifie T avec une application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- ❸ Celle-ci est donnée par multiplication matricielle
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} = S(\vec{x}).$$
- ❹ $\dim \text{Ker } A =$ nombre de colonnes sans pivot
- ❺ $\dim \text{Im } A = \text{rang } A =$ nombre de colonnes-pivot
- ❻ nombre de colonnes-pivot + colonnes sans pivot = n . □

4.6.2 IDÉE DE LA PREUVE GÉNÉRALE.

Si $\dim V = n$, $\dim \text{Ker } T = k \leq n$ car $\text{Ker } T \subset V$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_k)$ de $\text{Ker } T$. Grâce au Théorème de la base complétée il existe $e_{k+1}, \dots, e_n$ tq $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de V .

Alors $\{T(e_1), \dots, T(e_k), T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ engendrent $\text{Im } T$.

Donc $\{T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)\}$ _____.

Mais $T|_{\underbrace{\text{Vect}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}}_U : U \rightarrow W}$ est injective car $\text{Ker } T \cap U = \{0\}$.

Donc $T(e_{k+1}), \dots, T(e_n)$ sont libres, donc forment une base $\checkmark$ de $\text{Im } T$. On choisit $\text{rang } T = n - k$. $\square$

4.6.2 EXEMPLE

Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme p de degré ≤ 2 .

Nous allons

- ➊ calculer le noyau,
- ➋ en déduire la dimension de l'image grâce au Théorème du rang, et
- ➌ interpréter ce résultat pour conclure que deux zéros d'une fonction polynomiale de degré ≤ 2 déterminent le polynôme en question à un facteur près.

4.6.2 EXEMPLE 1.

$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \left\{ p \in \mathbb{P}_2 \mid p(0) = 0 = p(1) \right\} \begin{array}{l} t \mid p(t) \\ t-1 \mid p(t) \\ \hline \end{array} \\ &= \left\{ p \in \mathbb{P}_2 \mid p(t) = a \cdot t \cdot (t-1) \text{ pour un } a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \{ t(t-1) \}, \text{ de dimension } 1. \end{aligned}$$

Par le Théorème du rang, $\text{rang } T + \underbrace{\dim \text{Ker } T}_{=1} = 3$
donc $\text{rang } T = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.

Ainsi T est surjective car $\text{Im } T = \mathbb{R}^2$.

L'interprétation suit: si $p(t)$ s'annule en 0 et en 1, alors $p(t) = a \cdot t \cdot (t-1)$ pour $a \in \mathbb{R}$.

4.6.2 EXEMPLE, SUITE

Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme p de degré ≤ 2 .

Nous allons

- ❶ calculer le noyau,
- ❷ en déduire que T est surjective grâce au Théorème du rang, et
- ❸ interpréter ce résultat pour conclure que trois points du graphe d'une fonction polynomiale de degré ≤ 2 déterminent uniquement le polynôme en question.

4.6.2 EXEMPLE 2.

$$\begin{aligned} \text{Si } p(t) &= a + bt + ct^2 \text{ s'annule en } 0, 1 \text{ et } 2 \\ p(0) &= a = 0 \\ p(1) &= a + b + c = 0 \\ p(2) &= a + 2b + 4c = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} p(0) &= a = 0 \\ p(1) &= a + b + c = 0 \\ p(2) &= a + 2b + 4c = 0 \end{aligned}} \right\} \text{ ainsi } a = b = c = 0$$
$$\text{Ker } T = \{0\}, \quad \dim \text{Ker } T = 0$$

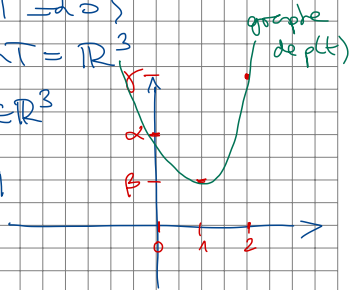
Par le Théorème du rang, $\text{rang } T = 3 = \dim \mathbb{P}_2$.

Donc T est injective car $\text{Ker } T = \{0\}$
est surjective car $\text{Im } T = \mathbb{R}^3$

Interprétation: Pour tout $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

il existe un unique $p \in \mathbb{P}_2$ tq

$$T(p) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$



$\begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$

4.6.3 CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ

THÉORÈME

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(A) La matrice A est inversible.

$\Downarrow$ $\#$ pivots

(M) Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.

$\Downarrow$

(N) $\text{Im} A = \mathbb{R}^n$. A surjective

$\Downarrow$

(O) $\dim \text{Im } A = n$.

$\Downarrow$

(P) $\text{rang } A = n$

$\Downarrow$ Thm rang

(Q) $\text{Ker } A = \{0\}$ A injective

$\Downarrow$

(R) $\dim \text{Ker } A = 0$. $\xRightarrow[\text{vu}]{\text{déjà}} (A)$

4.6.3 EXEMPLE

Pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice A suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1}]{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Si $a-1=0$
 $a=1$
 $\text{rang } A = 1$
 $\dim \text{Ker } A = 3$

Si $a \neq 1$, on peut diviser chaque ligne par $a-1$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \cdot \frac{1}{a-1} \\ L_3 \cdot \frac{1}{a-1} \\ L_4 \cdot \frac{1}{1-a}}]{L_4 - L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+a \end{pmatrix}$$

Si $a = -3$, $\text{rang } A = 3$, $\dim \text{Ker } A = 1$

4.6.3 EXEMPLE, SUITE.

Si $a \neq -3$, A est inversible.

Conclue A est inversible sss

$$a \notin \{1, -3\}$$

5.4.1 UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures.

En fait $W = \text{Vect}\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$ et $\mathcal{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{22})$ est une base de W .

On considère $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(2) \end{pmatrix}$$

En choisissant la base canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2)$ on identifie $\mathbb{P}_2$ avec $\mathbb{R}^3$ et en choisissant la base ci-dessus de W on identifie W avec $\mathbb{R}^3$ également.

5.4.1 LES IMAGES DES VECTEURS DE BASE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 = (1)_{can} \text{ et } 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_1 \text{ et } (W_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 = (t)_{can} \text{ et } t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = W_2 \text{ et } (W_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3 = (t^2)_{can} \text{ et } t^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = W_3 \text{ et } (W_3)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.4.1 LA MATRICE DE T

On représente T , après avoir choisi les bases $\mathcal{C}an$ de $\mathbb{P}_2$ et $\mathcal{B}$ de W , par la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de la base $\mathcal{C}an$ exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = (T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

