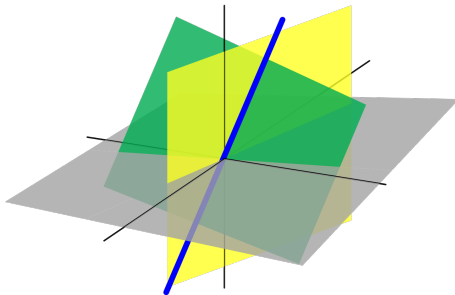


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 31 OCTOBRE

Jérôme Scherer



4.2.2 RAPPEL ET NOUVEAUTÉ : NOYAU ET IMAGE

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

DÉFINITION

Le **noyau** de T est le sous-ensemble $\text{Ker } T = \{v \in V \mid Tv = 0\}$.

DÉFINITION

L'**image** d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est le sous-ensemble $\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$.

REMARQUE

- ❶ Le concept de noyau généralise la notion de solution générale d'un système homogène.
- ❷ Le concept d'image généralise la notion du sous-espace ColA engendré par les colonnes d'une matrice A .

4.2.2 UN AUTRE EXEMPLE.

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $T(\vec{x}) = \det(A_n(\vec{x}))$ (le déterminant de la matrice A dont on a remplacé la dernière colonne par $\vec{x}$). On appelle $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$ les $(n-1)$ premières colonnes de A .

- ❶ Si $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$ sont liés, alors $T(\vec{x}) = 0$ pour tout $\vec{x}$, si bien que le noyau de T est $\mathbb{R}^n$.
- ❷ Sinon, $T(\vec{x}) = 0$ si et seulement si $\vec{x}$ est linéairement dépendant de $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$, car sinon les n colonnes de $A_n(\vec{x})$ sont libres et le déterminant est non nul. Ainsi $\text{Ker } T = \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$.

4.2.3 LE NOYAU EST UN SOUS-ESPACE

Exemple. Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a - d \end{pmatrix}$$

On vérifie que T est linéaire. Le noyau de T est un sous-ensemble de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Lequel ? C'est le sous-espace de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

THÉORÈME

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Ker } T$ est un sous-espace de V .

4.2.3 PREUVE.

- ① $0_v \in \text{Ker } T$: $T(0_v) = 0_w$ car T est linéaire
(en particulier $\text{Ker } T \neq \emptyset$).
- ② stabilité de $+$: Si $v, v' \in \text{Ker } T$, on montre
que $v+v' \in \text{Ker } T$. On calcule $T(v+v') \stackrel{T \text{ linéaire}}{=} \\ = T(v) + T(v') \stackrel{v, v' \in \text{Ker } T}{=} 0 + 0 = 0.$
Donc $v+v' \in \text{Ker } T$
- ③ stabilité de l'action : Si $v \in \text{Ker } T$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on
montre que $\alpha \cdot v \in \text{Ker } T$ en calculant $T(\alpha \cdot v) \stackrel{T \text{ lin}}{=} \\ \alpha T(v) \stackrel{v \in \text{Ker } T}{=} \alpha \cdot 0 = 0$, si bien que $\alpha \cdot v \in \text{Ker } T$ $\square$

CRITÈRE D'INJECTIVITÉ

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors T est injective si et seulement si $\text{Ker } T = \{0\}$.

4.2.4 CALCUL DU NOYAU AVEC GAUSS

REMARQUE

Lors du calcul d'un noyau on est souvent amené à résoudre un système d'équations homogène. La méthode de Gauss et la description de la solution générale sous forme paramétrique fournit alors un **système de générateurs linéairement indépendants**.

Exemple. On considère $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z - w \\ x - y - z + w \end{pmatrix}.$$
$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T est linéaire, sa matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T(\vec{e}_1) \xrightarrow{\text{vérifie:}} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.2.4 EXEMPLE.

$\text{Ker } T = \text{Ker } A = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot \vec{v} = \vec{0} \}$ est la solution générale S du système homogène donné par A .

$$A \xrightarrow{L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2'} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \text{Ker } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ plan de } \mathbb{R}^4$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}$$

forment une base de $\text{Ker } A$
(à cause des 1 et 0 en bleu).

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = y \\ z = w \end{matrix}$$

4.2.5 L'IMAGE

DÉFINITION

L'**image** d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est le sous-ensemble $\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$.

REMARQUE

Le concept d'image généralise la notion du sous-espace $\text{Col}A$ engendré par les colonnes d'une matrice A .

En effet, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est représentée par une matrice A de taille $m \times n$, l'image de T est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A puisque

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n$$

4.2.5 L'IMAGE

DÉFINITION

L'**image** d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est le sous-ensemble $\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$.

REMARQUE

Le concept d'image généralise la notion du sous-espace $\text{Col}A$ engendré par les colonnes d'une matrice A .

En effet, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est représentée par une matrice A de taille $m \times n$, l'image de T est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A puisque

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

On parle alors de l'**image de A** que l'on note $\text{Im}A$.

4.2.5 EXEMPLE

Considérons un exemple du type de ceux que nous avons étudié dans le Chapitre 1.

Exemple. Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + c \\ -a - c \\ b + 2a + 2c \\ -b \end{pmatrix}$$

On voit que T est linéaire puisque T est représentée par une matrice.

Les colonnes de cette matrice sont les images des vecteurs de la base canonique.

4.2.5 EXEMPLE, SUITE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(\vec{e}_1)$ $T(\vec{e}_2)$ $T(\vec{e}_3) = T(\vec{e}_1)$

Par conséquent l'image de T est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$. Lequel ?

$$\text{Im } A = \text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Cl } A.$$

Ici c'est un plan dans $\mathbb{R}^4$.

4.2.6 L'IMAGE EST UN SOUS-ESPACE

THÉORÈME

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Im } T$ est un sous-espace de W .

REMARQUE

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Ker } T$ est un sous-espace de V , mais $\text{Im } T$ est un sous-espace de W .

Preuve. On voit d'abord que $0 = T(0)$ appartient à l'image. Il reste à montrer la stabilité de la somme et de l'action. Traitons le cas de la somme. Soient donc w, w' deux vecteurs de $\text{Im } T$. Nous devons montrer que $w + w'$ aussi appartient à $\text{Im } T$.

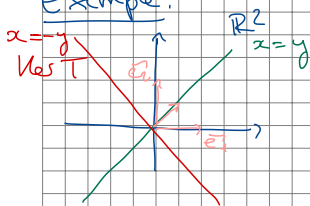
4.2.6 SUITE.

On sait que $w, w' \in \text{Im} T$, donc il existe $v, v' \in V$ tq $T(v) = w$ et $T(v') = w'$.

On choisit $\tilde{v} = v + v'$ et on calcule par linéarité de T : $T(\tilde{v}) = T(v + v') = T(v) + T(v') = w + w'$.

Donc $w + w' \in \text{Im} T$. $\square$

Exemple:



T : projection orthogonale sur la droite D d'éq. $x=y$.

$$\text{Im} T = \text{Im} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \text{Col } A$$

colonnes
identiques

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow{A} \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = D$$

4.2.6 EXEMPLE.

Soit $D: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ la dérivation, $D(p) = p'$.

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{Ker} D &= \{ p \in \mathbb{P}_3 \mid p' = 0 \} = \{ a \in \mathbb{P}_3 \mid a \in \mathbb{R} \} \\ &= \operatorname{Vect} \{ 1 \} \end{aligned}$$

polynômes constants

$$\begin{aligned} \bullet \operatorname{Im} D &= \{ q \in \mathbb{P}_3 \mid \exists p \in \mathbb{P}_3 \text{ avec } D(p) = q \} \\ &= \operatorname{Vect} \{ 1, t, t^2 \} \subset \mathbb{P}_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } p(t) &= a + bt + ct^2 + dt^3 \\ D(p(t)) = p'(t) &= b + 2ct + 3dt^2 \in \operatorname{Vect} \{ 1, t, t^2 \} \end{aligned}$$

D n'est pas surjective, $t^3 \notin \operatorname{Im} D$

4.2.7 MÉTHODE DE CALCUL

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire, représentée par une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- 1 Pour calculer le **noyau** de T on échelonne et réduit la matrice A selon les **lignes**.
- 2 Pour calculer l'**image** de T on ne garde que les **colonnes-pivot**.
Si nécessaire on échelonne et réduit A selon les **colonnes**.

ESPACE-COLONNE

On appelle parfois **espace-colonne** le sous-espace $\text{Col}A$ engendré par les colonnes de A . Il s'agit donc de $\text{Im}A$!

4.2.7 EXPLICATION

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, et B la matrice échelonnée associée.

Si une colonne n'a pas de pivot, le système $A\vec{x} = \vec{0}$ a une infinité de solutions (les mêmes que $B\vec{x} = \vec{0}$), on peut écrire

$$x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \vec{b}_1 + \cdots + x_n \vec{b}_n = \vec{0}$$

La colonne sans pivot est combinaison linéaire des autres colonnes.

IMPORTANT

Les colonnes de A vérifient les mêmes relations de dépendance linéaire que celles de B .

On peut donc enlever une telle colonne pour engendrer

$\text{Col}A = \text{Im}A$. Les k colonnes-pivot restantes **de** A sont libres puisque la matrice $m \times k$ formée de ces k colonnes a k pivots.

4.2.7 EXEMPLE

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous voulons calculer le noyau et l'image de A , c'est-à-dire le noyau et l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par $T\vec{x} = A\vec{x}$.

Nous utilisons donc la méthode Gauss, pour simultanément construire une base du noyau de A et extraire une base de l'espace-colonnes $\text{Col}A = \text{Im}A$.

4.2.7 SUITE.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_2' \\ L_4+L_3'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

libre

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une droite, dim Ker } A = 1$$

$$\text{Col } A = \text{Im } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

colonnes pivot de A

⚠ Les colonnes de A, pas de B!!

4.2.8 EXEMPLE

Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ défini par

$$T(A) = A + A^T$$

Nous savons que T est linéaire puisque $(\)^T$ linéaire

$$\begin{aligned} (1) \quad T(A+B) &\stackrel{\text{def de } T}{=} (A+B) + (A+B)^T \stackrel{\downarrow}{=} A+B + A^T + B^T = \\ &\stackrel{+ \text{ comm}}{=} A + A^T + B + B^T \stackrel{\text{def. } T}{=} T(A) + T(B) \end{aligned}$$

De même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(2) \quad T(\alpha A) = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha A + \alpha A^T = \alpha(A + A^T) = \alpha T(A)$$

4.2.8 QUEL EST LE NOYAU DE T ?

Il s'agit des matrices A telles que $A + A^T = 0$. En "dollars" si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$T(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$$

Cette matrice est la matrice nulle si et seulement si $a = d = 0$ et $b + c = 0$. En d'autres termes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dim 1
une droite de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

4.2.8 QUELLE EST L'IMAGE DE T ?

L'image de T est constituée de toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b+c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d peuvent prendre des valeurs arbitraires. Ainsi

$$\text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_{12}+e_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_{22}} \right\}$$

dim 3

5.4.0. LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

4.2.8 LA MATRICE DE T .

On choisit $\mathcal{E}_{\text{an}} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ comme base de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ au départ et à l'arrivée.

$$T(e_{11}) = e_{11} + (e_{11})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_{11}$$

$$T(e_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_{12} + e_{21} = T(e_{21})$$

$$T(e_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_{22}.$$

$$A = (T)_{\mathcal{E}_{\text{an}}}^{\mathcal{E}_{\text{an}}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

N.B: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}_{\text{an}}}$, idem pour $\text{Im } A$.

$$\text{Im } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.2.9 CRITÈRE D'INJECTIVITÉ, RAPPEL

Le critère d'injectivité d'une application linéaire permet de ramener la démonstration de l'injectivité au calcul du noyau. Le noyau mesure donc le défaut d'injectivité.

PROPOSITION

Une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est injective si et seulement si $\text{Ker } T = \{0\}$.

4.6.1 ESPACES-LIGNES : LGNA

Soit A et B deux matrices de taille $m \times n$. On note $A \sim B$ quand elles sont équivalentes selon les lignes.

THÉORÈME

Si $A \sim B$, alors les lignes de A et B engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Pourquoi ? Les opérations élémentaires produisent de nouvelles lignes qui sont combinaisons linéaires des précédentes.

THÉORÈME

Les lignes d'une forme échelonnée de A forment une base du sous-espace engendré par les lignes de A .

Pourquoi ? Aucune ligne non nulle de la forme échelonnée ne peut être combinaison linéaire des autres (à cause de son pivot).

4.6.1. EXAMPLE.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L_4 = L_4 + \frac{1}{3}L_2 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_3 - 3L_2 \\ L_4 - L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \cdot (-\frac{1}{3}) \\ L_3 \cdot (-\frac{1}{7}) \\ L_4 + 5L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Lgn } A = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Col } A = \text{Vect} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_5 \}.$$

form a base

4.6.1 ESPACES-COLONNES : $\text{Col}A$

Soit A une matrices de taille $m \times n$.

THÉORÈME

Les colonnes pivots de A forment une base de $\text{Col}A = \text{Im } A$.

Pourquoi ? Si une colonne de A est combinaison linéaire d'autres colonnes, alors la même combinaison linéaire se retrouve pour les colonnes d'une matrice $B \sim A$.

Si B est une forme échelonnée de A , alors les colonnes-pivots sont libres et les autres colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes pivots.

Il en va donc de même pour les colonnes de A .



4.6.1 REMARQUE IMPORTANTE

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

THÉORÈME

$$\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$$

- 1 Le nombre de lignes linéairement indépendantes est égal au nombre de lignes contenant un pivot.
- 2 Le nombre de colonnes linéairement indépendantes est égal au nombre de colonnes contenant un pivot.
- 3 En résumé, $\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$ car les deux dimensions coïncident avec le nombre de pivots !