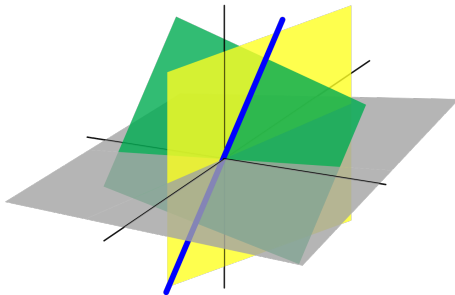


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 17 OCTOBRE

Jérôme Scherer



4.3.1 PARTIES LIBRES ET BASES : RAPPELS

Soit W un sous-espace vectoriel de V .

- ❶ Les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de W sont **linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

- ❷ On dit que l'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une **partie libre** de W .

DÉFINITION

Une famille **ordonnée** de vecteurs $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ de W est une **base** de W si c'est une partie libre qui engendre W .

4.3.2 BASES CANONIQUES

- ❶ Le cas de $\mathbb{R}^n$. La base *canonique* est

$$\mathcal{C}an = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

C'est une base car nous avons vu que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\vec{e}_i$.

- ❷ Le cas de $\mathbb{P}_n$. La base *canonique* est

$$\mathcal{C}an = (1, t, t^2, \dots, t^n)$$

Ici aussi tout vecteur de $\mathbb{P}_n$, i.e. tout polynôme de degré $\leq n$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces monômes t^i , car un tel polynôme est de la forme $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n$.

4.3.2 BASES CANONIQUES, SUITE

(3) Le cas de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. La base *canonique* est

$$\mathcal{Can} = (e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn})$$

où e_{ij} est la matrice constituée de zéros, sauf le coefficients (i, j) qui vaut 1. Dans $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, la base canonique est donnée **dans cet ordre** :

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.3 EXEMPLE

Soit W le plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$.

L'inconnue x est principale, les inconnues y, z sont secondaires et seront nos paramètres.

$$x = -y - z$$

Les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de W .

REMARQUE

Il n'y a pas de base canonique dans W . Nous avons fait des choix de paramètres !

EXEMPLE. Si on considère x, y comme inconnues
libres, z principale, alors on trouve une
autre base

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

4.3.4 THÉORÈME DE LA BASE EXTRAITE

Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ une famille de vecteurs qui engendrent V .

THÉORÈME

- a Si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en supprimant v_i engendre encore V .
- b Si $V \neq \{0\}$, il existe une sous-famille de $\{v_1, \dots, v_k\}$ qui forme une base de V .

Preuve. (A) Pour $i = k$. On suppose que

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$$

Puisque la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V , tout vecteur $v \in V$ est une combinaison linéaire des v_i .

PREUVE, SUITE

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) \\ &= (\beta_1 + \beta_k \alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) v_{k-1} \end{aligned}$$

Nous avons montré que v est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{k-1}$.

(B) Si la famille est libre on arrête tout ! Sinon la partie (A)

permet d'enlever un générateur v_i et on continue inductivement

jusqu'à ce que la famille soit libre. Le processus s'arrête puisque le nombre de vecteurs au départ est **fini**. □

4.4.1 COMBINAISONS LINÉAIRES D'UNE BASE

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

THÉORÈME

Tout vecteur x de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, pour des nombres réels $x_1, \dots, x_n$.

Existence. Une base est un **système de générateurs** !

Unicité. Si $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors

$$(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

Une base est **libre** ! Ainsi $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.



Remarque. C'est l'argument fait en 1.9.1, cours 6.

4.4.2 COORDONNÉES

DÉFINITION

Les **composantes** ou **coordonnées** d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients réels $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On se représente alors x comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

NOTATION STANDARD

Dans la base canonique $\mathcal{C}an$ de $\mathbb{R}^n$ on retrouve la notation vectorielle standard : $(\vec{x})_{\mathcal{C}an} = \vec{x}$.

4.4.2 EXEMPLE

Dans $\mathbb{R}^2$ un vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'est autre que $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'écriture vectorielle était celle des coordonnées dans $\mathcal{C}an$.

Une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est formée de $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ représente $\vec{u} = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2$.

Exprimé dans la base canonique il s'agit de

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (\vec{u})_{\mathcal{C}an}$$

$$(\vec{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.4.2 EXEMPLES.

J'affirme que $\mathcal{B} = \left(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En

$$(b_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

effet $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. Le vecteur $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'exprime comme combo linéaire des $\overline{b_i}$ et on cherche $(\overline{u})_{\mathcal{B}}$. On doit résoudre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$(\overline{u})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $(\overline{u})_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.4.2. SUITE $\mathcal{E}_{an} = (1, t, t^2)$ base de $\mathbb{P}_2$

Affirmation: $\mathcal{B} = (1+t+t^2, 1-t, 1+t)$ est une base

$1+t+t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2$, $(1+t+t^2)_{\mathcal{E}_{an}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussi:
de même $(1-t)_{\mathcal{E}_{an}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(1+t)_{\mathcal{E}_{an}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que ces trois vecteurs sont libres et engendrent $\mathbb{P}_2$, on doit montrer que pour tout polynôme $a+bt+ct^2$, $\exists! \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\text{t.q. } \alpha(1+t+t^2) + \beta(1-t) + \gamma(1+t) = a+bt+ct^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) \cdot 1 + (\alpha - \beta + \gamma)t + \alpha t^2 = a + bt + ct^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha - \beta + \gamma = b \\ \alpha = c \end{cases}$$

4.4.2. FIN $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array} \right)$

$(1+t+t^2)_{\mathcal{B}}$ $(1-t)_{\mathcal{B}}$ $(1+t)_{\mathcal{B}}$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(1+t)_{\mathcal{B}}$ $(1+t)_{\mathcal{B}}$

$$B \cdot (p(t))_{\mathcal{B}} = (p(t))_{\mathcal{B}}$$

B est une base car $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible

(a un pivot / ligne ou / colonne etc...)

Ici $\det B = 2$, donc B inversible. Par le Théorème alphaséculaire ceci signifie que le système homogène donné par B a 1 seule solution (injectivité) ainsi les colonnes de B sont lin. indépendantes. Par le même Théorème, $(B|I)$ a tjrs une solution (surjectivité), donc les colonnes engendrent $\mathbb{R}^3$.

4.4.3 COMPARAISON AVEC $\mathbb{R}^n$

DÉFINITION

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

Un isomorphisme permet d'identifier la source et le but de cette application linéaire $T : V \rightarrow W$. Les éléments de V et W se correspondent parfaitement, et les opérations de somme et d'action aussi !

THÉORÈME

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de n vecteurs.

L'application $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(x) = (x)_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.

4.4.3 DÉMONSTRATION

Nous devons prouver quatre points, les deux premiers pour montrer que T est linéaire, les deux autres pour établir l'injectivité, et enfin la surjectivité.

- ❶ $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $v \in V$;
- ❷ $T(v + w) = T(v) + T(w)$ pour tous $v, w \in V$;
- ❸ $T(v) = \vec{0} \implies v = 0$; (critère d'injectivité)
- ❹ Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe $v \in V$ tel que $T(v) = \vec{b}$

Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w \in V$ que nous écrivons - de manière unique ! - comme $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $w = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$.

FIN DE LA PREUVE..

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad T(\lambda \cdot v) &= T(\lambda \cdot (v_1 b_1 + \dots + v_n b_n)) = \\ &\stackrel{\substack{\text{B. base} \\ \text{distrib.}}}{=} T(\lambda \cdot v_1 b_1 + \dots + \lambda \cdot v_n b_n) \\ &\stackrel{\text{def. de } T}{=} \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{def} \\ \text{action} \\ \text{de } \mathbb{R}^n}}{=} \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda T(v) \end{aligned}$$

② idem

③ $T(v) = (0)$ veut dire par def de T que
 $v = 0 \cdot b_1 + \dots + 0 \cdot b_n = 0$.

④ Pour tout $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, on pose
 $v = \beta_1 \cdot b_1 + \dots + \beta_n \cdot b_n$ et $T(v) = \vec{\beta}$.

□

4.4.3 EXEMPLES

- ❶ $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme. Pour la base canonique $\mathcal{C}an = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$, on a

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

- ❷ $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme. Pour la base canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2, t^3)$ on a

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

4.4.3 EXEMPLE 3.

Soit W le plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{B}$ la

base formée des vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$T: W \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$w \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad w = a \cdot \vec{b}_1 + b \cdot \vec{b}_2.$$

Par exemple $T \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 \cdot \vec{b}_1 + 2 \vec{b}_2$

$\triangleq T \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens, $\begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W$.

4.4.4 BASES ET COORDONNÉES

Considérons les polynômes

$$p(t) = 1 + t^2, q(t) = 1 - t^2, r(t) = 1 - 2t + t^2 \in \mathbb{P}_2$$

On les écrit en coordonnées dans la base canonique :

$$(p)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (q)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PIVOTS

La famille (p, q, r) est une base de $\mathbb{P}^2$ si et seulement si la matrice

carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a trois pivots.

4.4.4 SUITE.

Comme vu ci-dessus ceci signifie en effet que les colonnes sont libres et qu'elles engendrent $\mathbb{R}^3$ si bien que p, q, r sont libres dans $\mathbb{P}_2$ et engendrent $\mathbb{P}_2$. t^2

Ex: Le polynôme t s'écrit $(t)_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour trouver $(t)_{\mathcal{B}}$ on résout

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right) \quad \text{donc}$$

$$(t)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \quad \text{On vérifie } t = 1/2 \cdot (1+t^2) - 1/2(1-2t+t^2)$$

4.5.1 CARDINALITÉ D'UNE BASE

Généralisons. Soit

- ❶ V un espace vectoriel,
- ❷ $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V ,
- ❸ $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une famille ordonnée de vecteurs de V .

THÉORÈME

La famille ordonnée $\mathcal{C}$ est une base de V si et seulement si la matrice $A = ((c_1)_{\mathcal{B}}, \dots, (c_m)_{\mathcal{B}})$ a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne.

REMARQUE

En particulier A est une matrice carrée ($m = n$) et inversible.

4.5.1 CARDINALITÉ D'UNE BASE

Preuve. Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

On a donc un isomorphisme $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $T(v) = (v)_{\mathcal{B}}$.

- 1 On aimerait savoir quand $\mathcal{C}$ est une famille libre ;
- 2 On aimerait savoir quand $\mathcal{C}$ engendre V .

Famille libre. Il s'agit de comprendre quelles combinaisons linéaires $\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_m c_m$ donnent le vecteur nul. Or, comme T est **injective**, cette expression est nulle si et seulement si son image par T est nulle. De plus

$$\vec{0} = T(0) = T(\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_m c_m) = \alpha_1 T(c_1) + \dots + \alpha_m T(c_m)$$

Ce système (écrit sous forme vectorielle) a une solution unique quand $A = (T(c_1), \dots, T(c_m))$ a un pivot dans chaque colonne.

4.5.1 CARDINALITÉ D'UNE BASE

Famille génératrice. Il s'agit de comprendre si tout vecteur de V peut s'écrire comme combinaison linéaire $\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m$. Or, comme T est **surjective**, tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $T(v)$ pour un vecteur $v \in V$.

Ainsi on se demande quand le système (écrit sous forme vectorielle)

$$\alpha_1 T(c_1) + \cdots + \alpha_m T(c_m) = \vec{b}$$

a une solution pour tout $\vec{b}$, par linéarité de T comme ci-dessus.

En effet si $T(\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m) = T(v)$, alors

$\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m = v$ par **injectivité** de T .

Ce système a une solution unique quand $A = (T(c_1), \dots, T(c_m))$ a un pivot dans chaque ligne. □

4.5.2 LA DIMENSION

THÉORÈME

Deux bases de V ont le même nombre d'éléments.

COROLLAIRE

Si V admet une base de n vecteurs, alors une famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ de vecteurs de V avec $k > n$ est liée.

DÉFINITION

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. La **dimension** de V est n . On note $\dim V = n$.

- ① $\dim \mathbb{R}^n = n$ $\mathcal{B}_n = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$
- ② $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$ $\mathcal{B}_n = (1, \dots, t^n)$
- ③ $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$ $\mathcal{B}_n = (e_{11}, \dots, e_{mn})$

4.5.2 PLUS D'EXEMPLES.

④ W plan de $\mathbb{R}^3$ donné $x+y+z=0$
 $\dim W = 2$

⑤ $\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$

Pensez aux fonctions de Dirac : pour tout

$a \in \mathbb{R}$, $\delta_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$

graphe de δ_a

