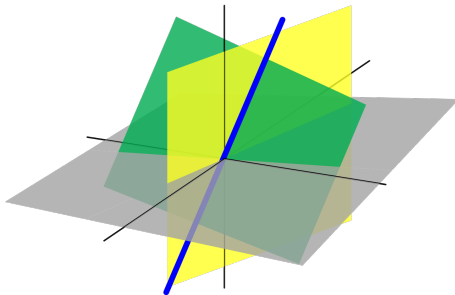


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 3 OCTOBRE

Jérôme Scherer



2.2.4 PROPRIÉTÉS DE L'INVERSE, RAPPEL

PROPRIÉTÉS

Soient A et B des matrices carrées $n \times n$ inversibles et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- a $(A^{-1})^{-1} = A;$
- b $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$
- c $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$
- d $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

Attention ! Pour que ces propriétés soient vraies, il faut que les matrices soient carrées. En effet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

est inversible, mais les matrices de départ ne le sont pas.

PREUVE. (a) A est inversible, il existe par définition une matrice A^{-1} tq $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$. Donc

$$A^{-1} \cdot A = I_n = A \cdot A^{-1}$$

Ainsi la matrice inverse de A^{-1} est A .

(b) Pour montrer que $(A \cdot B)^{-1}$ est $B^{-1} \cdot A^{-1}$ il suffit de calculer $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) \stackrel{\text{ass.}}{=} A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{= I_n, B \text{ inversible}} \cdot A^{-1}$
 $= A \cdot I_n \cdot A^{-1} \stackrel{\text{unité}}{=} A \cdot A^{-1} = I_n$
 $\swarrow$ A inversible.

De même $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_n$.

(c) Si A est inversible, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Pour le montrer on calcule $A^T \cdot (A^{-1})^T$ et $(A^{-1})^T \cdot A^T$.
 Pour $(A^{-1})^T \cdot A^T \stackrel{\substack{\text{propriété} \\ \text{de } T}}{=} (A \cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n$.

(d) $(\lambda \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{\lambda} A^{-1}\right) \stackrel{\substack{\text{compatibilité} \\ \text{produit action}}}{=} \underbrace{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}_1 \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_n} = I_n$

de même pour l'autre produit. $\square$

2.2.5 L'INVERSE D'UNE MATRICE 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors

- A est inversible si et seulement si :
- A représente une application linéaire bijective, si et seulement si :
- les colonnes de A ne sont pas proportionnelles, si et seulement si :

- $d \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq c \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, si et seulement si :

- $ad \neq bc$.

diagonale — antidiagonale

1^{ère} colonne $\cdot d$
2^e colonne $\cdot c$
si $c, d \neq 0$

2.2.5 L'INVERSE D'UNE MATRICE 2×2

DÉFINITION

Le **déterminant** de la matrice A est le nombre réel $\det A = ad - bc$.

Nous avons vu qu'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement son **déterminant** $ad - bc$ est différent de zéro.

Lorsque $\det A \neq 0$, l'inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

on a transposé les termes de la diagonale
on a changé le signe dans l'anti-diagonale.

PREUVE. On calcule $A \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$ et

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\text{def de}}{=} \cdot$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} da - bc & \cancel{db} - \cancel{bd} \\ -\cancel{ca} + \cancel{ac} & -cb + ad \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{action}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{=0}{=} I_2.$$

□

Non-Exemples. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles car leur déterminant vaut zéro. Ce sont des matrices de projection, clairement des applications non réversibles.

EXEMPLES.

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible car

$$\det A = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1 \neq 0.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

② L'inverse de $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$

2.2.6 MATRICES ÉLÉMENTAIRES DE TYPE I

DÉFINITION

Soient $1 \leq i, j \leq n$. La **matrice élémentaire de type I** $E_{ij}(\lambda)$ pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, le coefficient (i, j) vaut λ et tous les autres coefficients sont nuls.

Sans le savoir nous n'avons cessé de faire des multiplications matricielles dès le début du cours !

PROPOSITION

Multiplier une matrice A à gauche par $E_{ij}(\lambda)$ correspond à ajouter λ fois la j -ème ligne à la i -ème.

EXEMPLE.

$$E_{32}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} =$$

$\swarrow L_3 + 4L_2$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 4b_1 + c_1 & 4b_2 + c_2 & 4b_3 + c_3 & 4b_4 + c_4 \end{pmatrix}.$$

Remarque: $E_{32}(4)$ est inversible (1 pivot/colonne)
Son inverse est $E_{32}(-4)$.

En général

$$E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$$

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2.2.6 MATRICES ÉLÉMENTAIRES DE TYPE II

DÉFINITION

La **matrice élémentaire de type II** E_{ij} pour $i \neq j$ est la matrice carrée I_n dont on a échangé les lignes i et j .

Sans le savoir nous n'avons cessé de faire des multiplications matricielles dès le début du cours !

PROPOSITION

Multiplier une matrice A à gauche par E_{ij} correspond à échanger les j -ème et i -ème lignes.

EXEMPLE.

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Remarque: E_{23} est inversible et $E_{23}^{-1} = E_{23}$

En général $(E_{ij})^{-1} = E_{ij} = E_{ji}$

Echanger les lignes i et j deux fois revient à ne rien faire du tout.

2.2.6 MATRICES ÉLÉMENTAIRES DE TYPE III

DÉFINITION

La **matrice élémentaire de type III** $E_i(\lambda)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, sauf le i -ème qui vaut λ .

Sans le savoir nous n'avons cessé de faire des multiplications matricielles dès le début du cours !

PROPOSITION

Multiplier une matrice A à gauche par $E_i(\lambda)$ correspond à multiplier par λ la i -ème ligne.

EXEMPLE. $E_2(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -3b_1 & -3b_2 & -3b_3 & -3b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

Remarque: $E_2(-3)$ est inversible, $E_2(-3)^{-1} = E_2(-\frac{1}{3})$

En général, $\forall 1 \leq i \leq n, \forall \lambda \neq 0$, $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\frac{1}{\lambda})$

multiplier L_i par λ , puis par $\frac{1}{\lambda}$, revient à ne rien faire.

2.2.6 MATRICES ET OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Nous avons obtenu une interprétation entièrement matricielle des trois types d'opérations introduites au début du chapitre 1.

OBSERVATION

Chaque matrice élémentaire est construite en effectuant l'opération élémentaire correspondante sur la matrice I_n .

THÉORÈME

- 1 Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si elle est équivalente selon les lignes à la matrice I_n .
- 2 Si A est inversible la suite d'opérations élémentaires qui transforme A en I_n transforme I_n en A^{-1} .

PREUVE. ① Une matrice A est inversible sss elle représente une application linéaire bijective. Elle a donc un pivot dans chaque ligne. Il existe donc des opérations élémentaires sur les lignes, disons k , qui correspondent à multiplier A à gauche successivement par des matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_k$ pour obtenir I_n .

② On a donc $E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$

$$\begin{aligned} \text{Alors } A^{-1} &= I_n \cdot A^{-1} = E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I_n} = \\ &= E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot I_n. \end{aligned}$$

La même suite d'opérations élémentaires transforme

I_n en A^{-1} . Et $A^{-1} = E_k \cdot \dots \cdot E_2 \cdot E_1$. $\square$

2.2.7 EXEMPLE

Pour calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on

échelonne et réduit A en effectuant simultanément les mêmes opérations sur I_3 . On place donc côte à côte les matrices A et I_3 et on commence :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1}]{\substack{\text{wavy arrow} \\ \text{arrow}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

SUITE.

$$\underbrace{L_2 \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \underbrace{L_1 + L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \underbrace{L_3 + L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3/2 & 1/2 & 1 \end{array} \right) \underbrace{L_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/2 \end{array} \right)$$

A^{-1}

REMARQUE.

Ainsi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

De plus

$$A^{-1} = E_3 \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot E_{32}(1) \cdot E_{13}(1) \cdot E_2 \left(\frac{1}{2} \right) \cdot E_{31}(-2) \cdot E_{21}(1)$$

① La solution de $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se lit dans la 2^e colonne à droite de la barre : c'est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$

② En fait pour calculer A^{-1} on résout simultanément trois systèmes $A\vec{x} = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq 3$.

Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ les trois solutions, uniques, car A est inversible, $A^{-1} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

2.3.1 CRITÈRES D'INVERSIBILITÉ, I

PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES

Soit $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

- a A est inversible.
- b A est équivalente selon les lignes à I_n .
- c A admet n positions de pivot.
- d $A\vec{x} = \vec{0}$ a une solution unique, $\vec{x} = \vec{0}$.
- e Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
- f L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective.

Nous avons déjà compris que les propriétés (A), (B) et (C) sont équivalentes.

Les propriétés (D), (E) et (F) aussi sont équivalentes (voir le critère d'injectivité).

2.3.1 CRITÈRES D'INVERSIBILITÉ, II

PROPRIÉTÉS ÉQUIVALENTES

- (G) $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution.
- (H) Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
- (I) L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective.
- (J) Il existe une matrice carrée C telle que $CA = I_n$.
- (K) Il existe une matrice carrée D telle que $AD = I_n$.
- (L) La matrice transposée A^T est inversible.

Les propriétés (G), (H) et (I) aussi sont équivalentes (voir le critère de surjectivité).

Nous allons démontrer que

$$(L) \Leftrightarrow (A) \Rightarrow (J) \Rightarrow (D) \Rightarrow (C) \Rightarrow (K) \Rightarrow (G) \Rightarrow (B)$$

PREUVE. $(L) \Leftrightarrow (A)$: déjà vu car $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$(A) \Rightarrow (I)$: Si A est inversible, A^{-1} existe, on pose $C = A^{-1}$.

$(I) \Rightarrow (D)$: Si C existe tq $C \cdot A = I_n$, supposons que $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Alors $\vec{x} = I_n \cdot \vec{x} = C \cdot \underbrace{A \cdot \vec{x}}_{=\vec{0}} = C \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

$(D) \Rightarrow (C)$: Si A représente une application injective alors elle a un pivot dans chaque colonne. Comme A est carrée, elle a un pivot dans chaque ligne, ce qui prouve (C) .

$(C) \Rightarrow (R)$