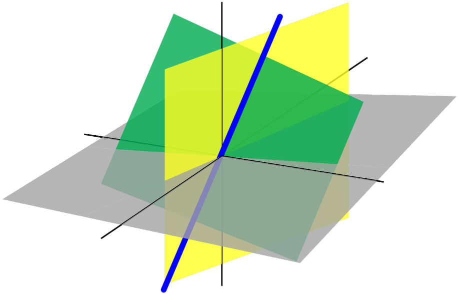
Algèbre Linéaire

Cours du 1er octobre

Jérôme Scherer



1.9.1 BIS COLONNES OU LIGNES ?

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Il y a donc m lignes et n colonnes.

Est-ce une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ ou de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^n$?

Truc 1.

Les colonnes de A sont les images de vecteurs des vecteurs $\overrightarrow{e}_i$, on va donc vers $\mathbb{R}^m$.

Truc 2.

Le produit matriciel se fait ligne par colonne, on part donc de $\mathbb{R}^n$.

2.1.5 Le produit matriciel

Soit $A = (a_{ik})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{kj})$ une matrice $n \times p$.

Slogan 1

On multiplie les matrices lignes par colonnes.

$$(A \cdot B)_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ \dots\ \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

On peut écrire cela grâce au produit "matrice fois vecteur" (1.4) :

$$\boxed{A \cdot B = A \cdot (\overrightarrow{b}_1 \dots \overrightarrow{b}_p) = (A\overrightarrow{b}_1 \dots A\overrightarrow{b}_p)}$$

2.1.5 Produit et composition

Slogan 2

Le produit matriciel représente la composition des applications linéaires.

1. $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire,
2. S est représentée par une matrice A de taille $m \times n$;
3. $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire,
4. T est représentée par une matrice B de taille $n \times p$.

Théorème

La matrice de $S \circ T$ est $A \cdot B$, de taille $m \times p$.

Exemple.

$$\begin{array}{r} \\ \\ 3^{\text{ème}}\text{ ligne} \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \qquad 2^{\text{e}}\text{ colonne} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.5 Exemple : Composition de rotations

Soit $R_{60} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ la matrice de rotation de 60^o.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de rotation de 120^o.

En général le calcul $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta}$ permet de retrouver les formules d'addition des angles :

$\boxed{\cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta}$ *Coco, si, si!*

$\boxed{\sin(\phi+\theta) = \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta}$ *Si, Coco, si!*



Preuve.

$$R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin \\ \sin(\phi+\theta) & \cos \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & \cdots \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & \cdots \end{pmatrix}$$

$\square$

2.1.6 Propriétés de la multiplication

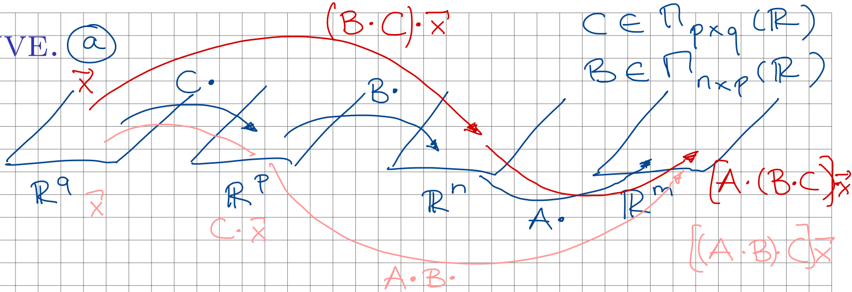
Propriétés

Si les produits matriciels suivants existent, alors :

- (a) associativité : $A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$;
- (b) distributivité à gauche : $A(B + C) = AB + AC$;
- (c) distributivité à droite : $(A + B)C = AC + BC$;
- (d) compatibilité action-produit : $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- (e) unité : $I \cdot A = A = A \cdot I$.

où α est un nombre réel et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice carrée

PREUVE. (a)



La matrice $A\cdot(B\cdot C)$ est la matrice de l'application représentée en rouge sur l'illustration.

——— $(A\cdot B)\cdot C$ ———

——— rose ———.

Ces deux applications sont les mêmes par associativité de la composition.

A la main : $[A\cdot(B\cdot C)]\vec{x} \overset{\cdot \text{ est la composition}}{=} A\cdot[(B\cdot C)\vec{x}] = A\cdot[B\cdot(C\cdot\vec{x})]$

$= (A\cdot B)\cdot C\vec{x} = [(A\cdot B)\cdot C]\,\vec{x}.$ $\square$

2.1.6 Commutativité ?

La propriété (E) nous apprend que pour une matrice carrée A de taille $n \times n$, les produits matriciels $A \cdot I_n = I_n \cdot A$. On dit que les matrices A et I_n commutent.

Définition

Une matrice carrée est scalaire si elle est de la forme αI_n, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Non commutation

En général le produit n'est pas commutatif : $AB \neq BA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

REMARQUE.

Les matrices qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires :

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tq $A \cdot B = B \cdot A$ $\forall\, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $A = \alpha \cdot I_n$.

2.1.6 Simplification ?

L'exemple que nous venons de voir montre aussi deux phénomènes intéressants.

Non intégrité

Le produit de deux matrices non nulles peut être nul :

$A \neq (0), B \neq (0)$, mais $AB = (0)$.

Non simplification

En général, si $AB = AC$, cela ne signifie pas que $B = C$.

Ci-dessus $AB = (0) = A \cdot (0)$, mais $B \neq (0)$.

Notation

Soit A une matrice carrée. Alors $A^0 = I$, puis $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$ et on définit les puissances $A^k = A^{k-1} \cdot A$ inductivement.

2.1.7 La transposition

Définition

Soit A une matrice $m \times n$. La transposée A^T de A est la matrice $n \times m$ dont le coefficient (i, j) est a_{ji}.

Transposer revient à échanger le rôle des lignes et des colonnes.

Exemple. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.1.7 Propriétés de la transposition

(a) $(A^T)^T = A$; $(\ \ )^T$ est une involution

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ "somme des transposées = transposée de la somme"

(c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

PREUVE. pour tous $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

(b) $$[(A+B)^T]_{ij} \underset{\text{de } T}{\overset{\text{déf}}{=}} (A+B)_{ji} \underset{\text{de } +}{\overset{\text{déf}}{=}} a_{ji} + b_{ji}$$

$$\underset{\text{de } T}{\overset{\text{déf}}{=}} (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij}$$

$$\overset{\text{déf de } +}{=} (A^T + B^T)_{ij}$$

Donc $(A+B)^T = A^T + B^T$. $\square$

<u>Interprétation</u> : $$(\ )^T : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto A^T$$

est <u>linéaire</u>.

2.1.7 Transposée d'un produit

Attention !

En général $(AB)^T \neq A^T B^T$.

D'ailleurs l'un des deux produits n'a probablement aucun sens !

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors $AB = (3)$, mais le produit

$$A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas comparable.

Propriétés de la transposition

(d) $(AB)^T = B^T A^T$

Preuve. Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

$$\underbrace{(B^T}_{p\times n} \cdot \underbrace{A^T}_{n\times m})_{ij} \overset{\text{def}}{\underset{\text{de}\,\cdot}{=}} \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} \cdot (A^T)_{kj}$$

taille

$$\overset{\text{def}}{\underset{\text{de}\,T}{=}} \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki}$$

comm de $\cdot$ dans $\mathbb{R}$

$$\overset{\text{def de}}{\underset{\cdot}{=}} (A \cdot B)_{ji} \overset{\text{def}}{\underset{\text{de}\,T}{=}} [(AB)^T]_{ij}$$

vrai pour tous les i,j, donc $B^T \cdot A^T = (AB)^T$ $\square$

Ex: $(I_n)^T = I_n$

$A = (a_{ij})$

2.2.1 Inverser une matrice

Il y a des applications linéaires qui sont réversibles et d'autres non.

Définition

Une matrice carrée A est inversible s'il existe une matrice B de même taille telle que $AB = I_n = BA$. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

La proposition suivante justifie la notation de l'inverse d'une matrice.

Unicité de l'inverse

Si A^{-1} existe, alors elle est unique.

PREUVE. Soient B, C sont deux inverses de A.
Alors

$$B \underset{\text{unité}}{=} B \cdot I_n \underset{\substack{C \text{ est un} \\ \text{inverse}}}{=} B \cdot (A \cdot C) \underset{\text{ass.}}{=} (B \cdot A) \cdot C \underset{\substack{B \text{ inverse} \\ \text{de } A}}{=} I_n \cdot C \underset{\text{unité}}{=} C.$$

$\square$

<u>Exemples:</u> I_n est la matrice de l'identité car

$$I_n \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$(I_n)^{-1} = I_n.$$

$$(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha} \quad \text{car} \quad R_\alpha \cdot R_{-\alpha} = I_2$$
$$R_{-\alpha} \cdot R_\alpha = I_2.$$

2.2.2 Inversibilité et résolution

Théorème

Si A est une matrice $n \times n$ inversible, alors le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a une unique solution pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. On calcule simplement pour toute solution $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\overrightarrow{x} = I\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$$

Toute solution est égale à $A^{-1}\overrightarrow{b}$, ce qui montre l'unicité. $\square$

Par conséquent une matrice inversible A a un pivot dans chaque ligne et dans chaque colonne.

2.2.3 Inversibilité et bijectivité

Corollaire

Si A est une matrice $n \times n$ inversible, alors elle représente une application linéaire injective et surjective (bijective).

1. **Injectivité.** Si $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
2. **Surjectivité.** Le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a toujours une solution.

Attention ! Ce n'est pas du tout la méthode la plus efficace pour résoudre un système que d'inverser la matrice associée...

2.2.4 Propriétés de l'inverse

Propriétés

Soient A et B des matrices carrées $n \times n$ inversibles et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- (a) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- (c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
- (d) $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$

Attention ! Pour que ces propriétés soient vraies, il faut que les matrices soient carrées. En effet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

est inversible, mais les matrices de départ ne le sont pas.