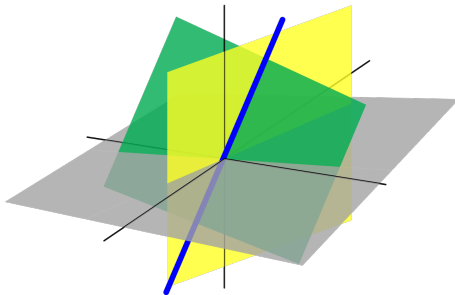


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 19 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



5.2.1 LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

DÉFINITION

Soit A une matrice $n \times n$. Le **polynôme caractéristique** de A est $c_A(t) = \det(A - tI_n)$.

THÉORÈME

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si c'est une racine de $c_A(t)$, i.e. $\det(A - \lambda I) = 0$.

Sa multiplicité en tant que racine est appelée **multiplicité algébrique**.

DÉFINITION

Soit λ une valeur propre de A . La **multiplicité géométrique** de λ est $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

5.2.2 SIMILITUDE $\approx$

DÉFINITION

Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$A = P^{-1}BP.$$

On note $A \approx B$.

THÉORÈME

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

La réciproque est fausse, puisque la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même, mais la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a également t^2 comme polynôme caractéristique.

5.2.2 EXEMPLE

Attention ! Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général. La matrice A est un **bloc de Jordan** :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{matrice scalaire}$$

La seule valeur propre de A et de B est 5, de multiplicité algébrique 2 car $c_A(t) = (t - 5)^2 = c_B(t)$. Mais

$$A \not\sim B$$

En effet B scalaire
 $P \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot (5I_2) \cdot P^{-1} = 5P \cdot I_2 \cdot P^{-1} = 5P \cdot P^{-1} = 5I_2 = B$.
compatibilité action et le produit I_2 neutre pour $\cdot$ inscuse

La multiplicité géométrique de 5 est 1 pour la matrice A , mais 2 pour B .

5.2.3 LES RELATIONS $\sim$ ET $\approx$

- ❶ Deux matrices A et B de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes selon les lignes et les colonnes s'il existe des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qui transforment A en B .
- ❷ Or, effectuer des opérations sur les lignes de A revient à multiplier A à **gauche** par une matrice inversible P ;
- ❷' effectuer une opération sur les colonnes de A = sur les lignes de A^T
- ❸ et effectuer des opérations sur les colonnes de A revient à multiplier A à **droite** par une matrice inversible Q .
car $E_{ij}(\lambda) \cdot A^T = E_{ji}(\lambda)^T \cdot A^T = (A \cdot E_{ji}(\lambda))^T$

DÉFINITION

Les matrices A et B sont **équivalentes** s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $PAQ = B$. On note $A \sim B$.

On note $A \sim B$. Clairement $A \approx B \Rightarrow A \sim B \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.2.4 CALCUL DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Par manque d'inspiration on calcule $c_A(t)$ avec Sarrus

$$\begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = -t^3 + 7t^2 - 4t - 30$$

Ce n'est pas facile de voir que les racines de $c_A(t)$ sont 5 , $1 - \sqrt{7}$ et $1 + \sqrt{7}$...

5.2.4 LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE AVEC DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ -6x - y + 4z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

Alors $A = (f)_{\text{can}}^{\text{can}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons $c_A(t)$.

Pour calculer le polynôme caractéristique de A , on effectue des opérations élémentaires selon les lignes ou les colonnes pour essayer de mettre $t - \lambda$ en évidence.

5.2.4 $C_A(t)$ AVEC DES OPÉRATIONS

$$C_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ -6 & -1-t & 4 \\ 0 & 1 & 2-t \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 + C_2} \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ -6 & -1-t & 3-t \\ 0 & 1 & 3-t \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{lin. de} \\ - \\ \text{dét.} \\ \text{selon } C_3 \end{array}$$

$$= (3-t) \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ -6 & -1-t & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_3} (3-t) \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 0 \\ -6 & -2-t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

développer

$$C_3 = (3-t) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -6 & -2-t \end{vmatrix} = (3-t) [t^2 + 2t - 3t - 6 + 6] = (3-t)(t^2 - t) = (3-t) \cdot t \cdot (t-1)$$

Valeurs propres : 3, 0, 1.

$\lambda = 0$ $E_0 = \text{Ker}(A - 0 \cdot I_3) = \text{Ker } A = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{dim } 1.$$

5.2.4 ESPACES PROPRES

$$\lambda = 3 \quad E_3 = \text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

rang = 2
 $\Rightarrow \dim \text{Ker} = 1$

$$\lambda = 1, \quad E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base } (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \text{ de vecteurs propres de } A$$

$$f(\vec{b}_1) = 0 \cdot \vec{b}_1, \quad f(\vec{b}_2) = 3 \cdot \vec{b}_2, \quad f(\vec{b}_3) = 1 \cdot \vec{b}_3.$$

$$(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale et les termes de la diagonale sont les valeurs propres dans l'ordre choisi pour $\mathcal{B}$

$$(f(\vec{b}_3))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.3.1 DIAGONALISATION

DÉFINITION

Une matrice est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, i. e. il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

THÉORÈME

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Preuve. On regarde A comme la matrice de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans la base canonique : $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$ et $(T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = A$. Soit $\mathcal{B}$ une autre base. Alors $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale $\iff T(\vec{b}_i) = \lambda_i \vec{b}_i \iff (T(\vec{b}_i))_{\mathcal{B}} = \lambda_i \vec{e}_i$. Dans la base $\mathcal{B}$ les coordonnées de $T(\vec{b}_i)$ sont nulles sauf la i -ème.

5.3.2 OBSERVATIONS

$$P \cdot (x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{E}_n}$$

$$\mathcal{E}_n \xleftarrow{P} \mathcal{B} \xleftarrow{D} \mathcal{B} \xleftarrow{P^{-1}} \mathcal{E}_n$$

- 1 Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_n}$ sont les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$.
- 2 $A = PDP^{-1}$ et D est diagonale, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A se trouvent dans la diagonale, dans l'ordre choisi pour construire la base.
- 3 Le déterminant de A est le produit des valeurs propres (avec multiplicité).

En effet

$$\begin{aligned}\det A &= \det(PDP^{-1}) = \det P \det D \det(P^{-1}) \\ &= \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$