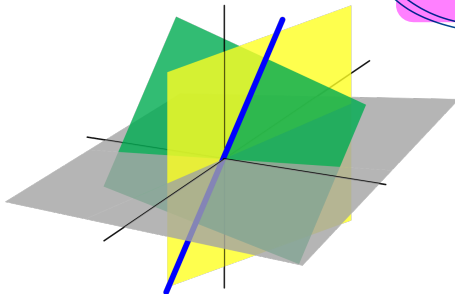


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 29 OCTOBRE

Jérôme Scherer



COLINÉARITÉ, VRAI OU FAUX ?

On considère trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ et on forme la matrice $A = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Affirmation. Si les trois vecteurs ne sont pas colinéaires, alors $\det A \neq 0$.


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DÉTERMINANT, VRAI OU FAUX ?

On considère trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ et on forme la matrice $A = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Affirmation. Si $\frac{5}{7}\vec{a} - 3\vec{b} + \sqrt{2}\vec{c} = \vec{0}$, alors $\det A = 0$.

L'INVERSE ET LES COFACTEURS

734178

Soit B l'inverse de la matrice

$L_2 - L_4$
 $00003 \mid 010-10$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Alors le coefficient b_{54} vaut

$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid b_{51} \ b_{52} \ b_{53} \ b_{54} \ b_{55}$

(A) $1/3$

(C) $-1/2$

(B) $1/2$

(D) $-1/3$

4.5.2 LA DIMENSION, RAPPEL

THÉORÈME

Deux bases de V ont le même nombre d'éléments.

DÉFINITION

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. La **dimension** de V est n . On note $\dim V = n$.

- ❶ $\dim \mathbb{R}^n = n$
- ❷ $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$
- ❸ $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$

Exemple. La dimension de $\mathbb{R}$ est 1. Il y a ici un seul sous-espace de dimension zéro, c'est $\{0\}$, et un seul sous-espace de dimension 1, c'est $\mathbb{R}$.

4.5.3 COMPLÉMENTS SUR LA DIMENSION

DIMENSION ZÉRO

Un espace vectoriel V est de **dimension nulle** si et seulement si $V = \{0\}$.

En effet 0 est un vecteur linéairement dépendant, il ne peut donc faire partie d'aucune base ! De plus notre convention était que $\text{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$. Ainsi l'ensemble vide est une famille libre de générateurs de $\{0\}$.

PROPOSITION

Soit V un espace vectoriel de dimension n . Si W est un sous-espace de V , alors $\dim W \leq n$.

Preuve. Toute famille de plus de n vecteurs de V est liée. |

4.5.4 LA DIMENSION ET LES SOUS-ESPACES DE $\mathbb{R}^3$

Il y a dans $\mathbb{R}^3$:

- ❶ Un seul sous-espace de dimension zéro $\{\vec{0}\}$
- ❷ Une infinité de sous-espaces de dimension 1 : droites $\text{Vect}\{\vec{u}\}$ passant par l'origine
- ❸ Une infinité de sous-espaces de dimension 2 : plans $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ passant par l'origine
- ❹ Un seul sous-espace de dimension trois $\mathbb{R}^3$

Car trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

4.5.5 THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE

On peut extraire une base d'une famille de générateurs et on peut compléter une famille libre en une base !

THÉORÈME

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_k\}$ une famille libre de vecteurs de V . Il existe alors des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de V .

Preuve. Si $(e_1, \dots, e_k)$ forme déjà une base de V , on s'arrête là. Sinon il existe un vecteur e_{k+1} qui n'est pas dans $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$. J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

4.5.5 FIN DE LA PREUVE

J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

- En effet si $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ car e_{k+1} n'est pas combinaison linéaire des autres e_j par construction.
- Ainsi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$.
- Comme la famille de départ est libre, tous les α_i sont nuls.

On peut donc ajouter e_{k+1} à la famille $\{e_1, \dots, e_k\}$.

On continue ce processus inductif jusqu'à compter n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.



4.5.5 EXEMPLE. Dans $\Pi_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $\dim = 6$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la base canonique de $\Pi_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, on

$$(A)_{e_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (B)_{e_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (C)_{e_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (D)_{e_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 \cdot e_{11} + 0 \cdot e_{12} + 0 \cdot e_{13} + 1 \cdot e_{21} + 1 \cdot e_{22} + 0 \cdot e_{23}$$

On place les vecteurs de $\mathbb{R}^6$ en ligne :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

les vecteurs e_{13} et e_{23} ne sont pas dans des colonnes pivots, ne sont donc combin lin des quatre lignes de M' , ni de M .

$(A, B, C, D, e_{13}, e_{23})$ est une base de $\Pi_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

4.5.6 DEUX POINTS DU VUE SUR LES BASES

Soit V un espace vectoriel de dimension n . Une **base** est une famille ordonnée de générateurs libre de V . Nous avons vu que toute base est composée du même nombre n de vecteurs.

CRITÈRES

- ❶ Une famille libre $\mathcal{L}$ de n vecteurs forme une base de V .
- ❷ Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de n vecteurs forme une base de V .

La raison en est que si on ajoute un vecteur à n vecteurs libres, la famille devient liée et si on enlève un vecteur de n générateurs, la famille n'engendre plus V .

Une base est donc une famille ordonnée libre *maximale* ou une famille de générateurs *minimale*.

4.5.7. COMMENT EXTRAIRE UNE BASE

Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une famille génératrice de V et

(donc $k \geq n$)

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V . Pour extraire une base de $\mathcal{F}$:

- 1 Trouver les composantes des f_j dans la base $\mathcal{B}$.
- 2 Ecrire la matrice F dont les **colonnes** sont les $(f_j)_{\mathcal{B}}$.
- 3 Echelonner F . *sur les lignes*
- 4 Ne garder que les n colonnes pivots de F .

Exemple. Extraire de la famille

$\{1 - t, -1 + t^2, t^2 - t, 1 + t, t^2 + 1\}$ une base de $\mathbb{P}_2$. *~ dir 3*

On choisit $\mathcal{B}_{\text{can}} = (1, t, t^2)$ base canonique de $\mathbb{P}_2$

4.5.7. EXTRACTION, EXEMPLE

$$(1-t)e_a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, (-1+t^2)e_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \text{ et on écrit}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_2'}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$(1+t)e_a$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

Conclure $B = (1-t, -1+t^2, 1+t)$ forme une base car les colonnes 1, 2, 4 forment une matrice 3×3 avec 3 pivots.



en calculant A^T , attention aux opérations élémentaires de type II qui échangent des lignes.

4.5.7 COMMENT COMPLÉTER UNE BASE

Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une famille libre de V dont on a une base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour compléter $\mathcal{F}$ en une base :

- 1 Trouver les composantes des f_j dans la base $\mathcal{B}$.
- 2 Ecrire la matrice F dont les **lignes** sont les $(f_j)_{\mathcal{B}}$.
- 3 Echelonner F .
- 4 Ajouter les vecteurs e_i pour les valeurs de i qui ne sont pas des colonnes pivot.

Exemple. Compléter la famille $\{\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_3 - \vec{e}_1, \vec{e}_4 - \vec{e}_1\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

4.5.7. COMPLÉTION, EXEMPLE

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 - L'_1 \\ L_3 - L'_1}]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $(\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_3 - \vec{e}_1, \vec{e}_4 - \vec{e}_1, \vec{e}_4)$
est une base de $\mathbb{R}^4$.

pas de pivot!

Autre solution: les trois vecteurs de la famille de départ vérifient $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ qui définit un hyperplan W dans $\mathbb{R}^4$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\notin W$, il est même $\perp$ à W , donc permet de compléter la famille en une base.

1.8 APPLICATIONS LINÉAIRES : RAPPELS

Soient V et W deux espaces vectoriels.

DÉFINITION

Une application $T : V \rightarrow W$ est **linéaire** si

- ❶ $T(u + v) = Tu + Tv$ pour tous $u, v \in V$;
- ❷ $T(\alpha v) = \alpha Tv$ pour tous $v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- ❶ Soit A une matrice $m \times n$. Alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$T\vec{x} = A\vec{x}$$

est linéaire

4.2.1 LINÉARITÉ : PLUS D'EXEMPLES

- ② La dérivée $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications ∞ -dérivables est linéaire. Ici $D(f) = f'$.

En effet $(f + g)' = f' + g'$ et $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$.

- ③ La dérivée $D : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ est linéaire. Ici $D(p) = p'$. En particulier $D(t^k) = kt^{k-1}$.

On peut prendre cela comme définition et “étendre par linéarité”, c'est-à-dire définir

$D(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)$ comme

$$n \cdot a_n t^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + a_1$$

Remarque : Comme $D(1) = 0$, la dérivation n'est pas injective.

4.2.1 LINÉARITÉ : CONTRE-EXEMPLE

L'application $C : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ définie par

$$p \mapsto p^2$$

n'est pas linéaire. En effet on voit par exemple que

$$C(2t) = (2t)^2 = 4t^2 \neq 2t^2 = 2C(t)$$

INTUITION

Souvent, les formules qui définissent une application linéaire sont données par des combinaisons linéaires de coefficients.

Exemple : Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $1 \leq i \leq n$. Alors l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $\vec{x}$ sur $\det(A_i(\vec{x}))$ est linéaire.

4.2.2 LE NOYAU

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

DÉFINITION

Le **noyau** de T est le sous-ensemble $\text{Ker } T = \{v \in V \mid Tv = 0\}$.

Etymologie. En allemand le mot “noyau” se dit “Kern”.

REMARQUE

Le concept de noyau généralise la notion de solution générale d'un système homogène.

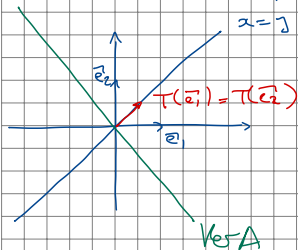
En effet, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est représentée par une matrice A de taille $m \times n$, le noyau de T est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $A\vec{x} = \vec{0}$. On parle alors du **noyau de A** , noté $\text{Ker } A$.

4.2.2 EXEMPLE.

Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur l'axe $x = y$.

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \text{ la matrice de } T$$

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



$$\begin{aligned} \text{Ker } T &= \text{Ker } A = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} 1/2 x + 1/2 y = 0 \\ 1/2 x + 1/2 y = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$