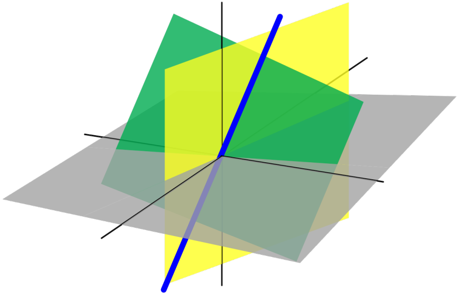
Algèbre Linéaire

Application: La Jacobienne

Jérôme Scherer



Un calcul d'intégrale double

Cet exemple classique en analyse de calcul d'aire revisite l'exemple vu en classe de l'ellipse. On considère

1. les coordonnées (x_1, x_2) cartésiennes du plan Ox_1x_2;
2. un domaine D du plan Ox_1x_2 dont on aimerait connaître l'aire;
3. des coordonnées y_1, y_2 mieux adaptées à la description de D.

On connaît également les fonctions qui permettent de changer de coordonnées $x_1 = f_1(y_1, y_2)$ et $x_2 = f_2(y_1, y_2)$.

Exemple de changement de coordonnées

Les coordonnées polaires sont mieux adaptées que les coordonnées cartésiennes dans le cas d'une ellipse $\mathcal{E}$ centrée en l'origine:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1}$$

1. Les coordonnées polaires sont r et θ, rayon et angle déterminés par rapport au repère Oxy.
2. On choisit ici les fonctions $x = f_1(r, \theta) = ar\cos\theta$ et $y = f_2(r, \theta) = br\sin\theta$.

L'ellipse est alors décrite par le fait que $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

La matrice Jacobienne

Soient deux fonctions réelles $f_1(y_1, y_2)$ et $f_2(y_1, y_2)$ (de deux variables réelles y_1 et y_2). Les dérivées partielles $\partial f_i / \partial y_j$ se calculent en dérivant la fonction f_i comme fonction d'une variable y_j (et l'autre variable est alors considérée comme une constante).

Définition

La matrice Jacobienne est la matrice $J = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial y_1 & \partial f_1/\partial y_2 \\ \partial f_2/\partial y_1 & \partial f_2/\partial y_2 \end{pmatrix}$.

Dans l'exemple la Jacobienne est $J = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix}$.

Chgt de variable dans une intégrale double

Soient

1. $g(x_1, x_2)$ une fonction réelle de deux variables réelles qu'on aimerait intégrer sur un domaine D;
2. des coordonnées y_1, y_2 mieux adaptées à la description de D;
3. un changement de variables $x_1 = f_1(y_1, y_2)$ et $x_2 = f_2(y_1, y_2)$;
4. un domaine U dans le repère Oy_1y_2 qui “correspond à D par le changement de variables”.

Théorème

$$\int\int_D g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int\int_U g(f_1(y_1, y_2), f_2(y_1, y_2)) \cdot \det J \cdot dy_1 dy_2$$

L'aire d'une ellipse

L'aire de l'ellipse $\mathcal{E}$ est donnée par la double intégrale de la fonction 1, ainsi

$$\boxed{Aire(\mathcal{E}) = \int\int_{\mathcal{E}} 1 \cdot dxdy}$$

Le passage aux coordonnées polaires permet de se ramener à une intégrale sur un rectangle $R = [0,1] \times [0, 2\pi]$.
Le déterminant de la Jacobienne vaut $abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr$.

Par la formule de changement de variable on a aussi

$$Aire(\mathcal{E}) = \int\int_R 1 \cdot \det J \cdot drd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 abrdr\right) d\theta = ab\pi$$