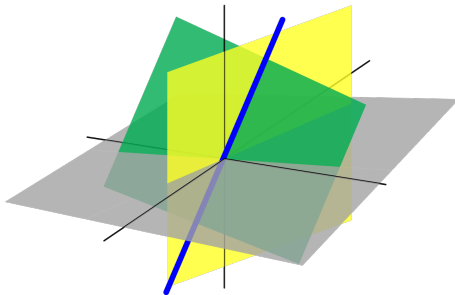


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU MARDI 3 DÉCEMBRE

Jérôme Scherer



6.2.1 FAMILLES ORTHOGONALES

DÉFINITION

Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tous $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Rappel.

- 1 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul :
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$
- 2 Par distributivité du produit scalaire, $\vec{u} \perp \vec{a}$ et $\vec{u} \perp \vec{b}$ implique que $\vec{u} \perp \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

THÉORÈME

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

6.2.2 COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHOGONALE

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base orthogonale de W .

THÉORÈME

Pour tout vecteur $\vec{w} \in W$, on a $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$ et

$$\alpha_j = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}$$

Exemple. On construit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ en commençant avec le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.

La méthode de Gauss nous fournit une base, par exemple, quitte à

amplifier pour éviter des fractions, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6.2.2 EXEMPLE

Or, ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux. Pour trouver un vecteur de W orthogonal à $\vec{b}_1$, je peux par exemple le choisir de

la forme $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$, le produit scalaire avec $\vec{b}_1$ vaut bien zéro,

mais il faut encore que $c = 13$ pour que l'équation du plan W soit satisfaite. Ainsi on obtient une base orthogonale de W avec

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$. On ajoute encore

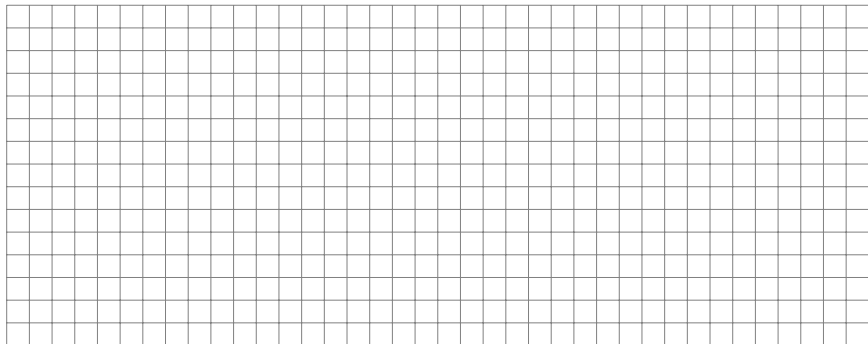
$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^\perp$ pour avoir une famille orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

6.2.2 EXEMPLE, SUITE

La famille ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est

une famille orthogonale de vec-

teurs non nuls de $\mathbb{R}^3$, elle en forme donc une base. On cherche $(\vec{u})_{\mathcal{B}}$.



6.2.2 EXAMPLE, FIN



6.2.3 MATRICES ORTHOGONALES

THÉORÈME

Les colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthonormées si et seulement si $U^T U = I_n$.

Preuve. Si $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$, alors le coefficient (i, j) de la matrice $U^T U$ est exactement $\vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$. □

DÉFINITION

Une matrice **carrée** U est **orthogonale** si $U^T U = I_n$. Autrement dit $U^{-1} = U^T \iff$ colonnes (et lignes !) de U sont orthonormées.

Une matrice orthogonale représente une transformation linéaire qui préserve les distances et l'orthogonalité (c'est donc une **isométrie** de $\mathbb{R}^n$, par exemple une rotation ou une symétrie).

6.2.4 PRÉSERVATION DES LONGUEURS

THÉORÈME

Soit U une matrice orthogonale. Alors

- ❶ $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ❷ $U\vec{x} \cdot U\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$.
- ❸ $U\vec{x} \perp U\vec{y} \iff \vec{x} \perp \vec{y}$.

Preuve. (2) On calcule $U\vec{x} \cdot U\vec{y}$ avec la définition :

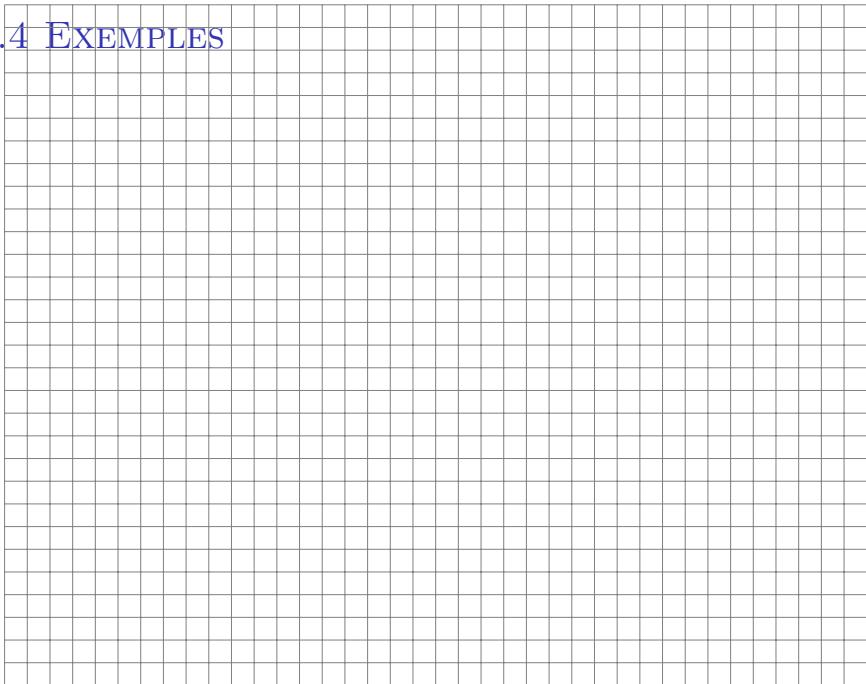
$$(U\vec{x})^T U\vec{y} = \vec{x}^T U^T U\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

(1) Lorsque $\vec{x} = \vec{y}$ on trouve $\|U\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ d'où le point 1.

(3) On voit que le produit scalaire $U\vec{x} \cdot U\vec{y}$ est nul si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.



6.2.4 EXAMPLES



6.2.4 EXAMPLES, FIN

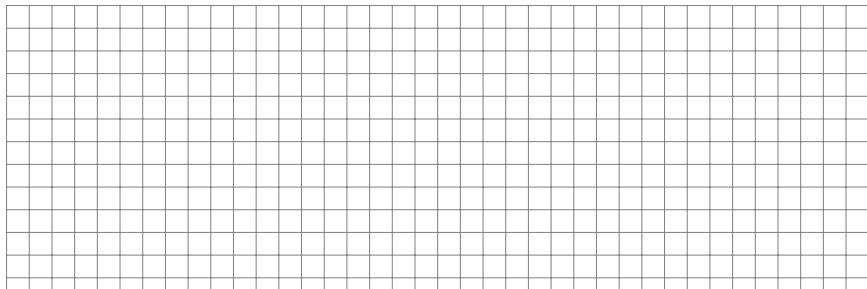


6.2.4 CAVEAT

ATTENTION !

Si U est orthogonale, alors aussi $UU^T = I_n$. Mais

- ❶ si A est carrée avec $A^T A$ diagonale, AA^T n'est pas diagonale en général ;
- ❷ si A n'est pas carrée avec $AA^T = I_n$, alors $A^T A \neq I_m$ en général.



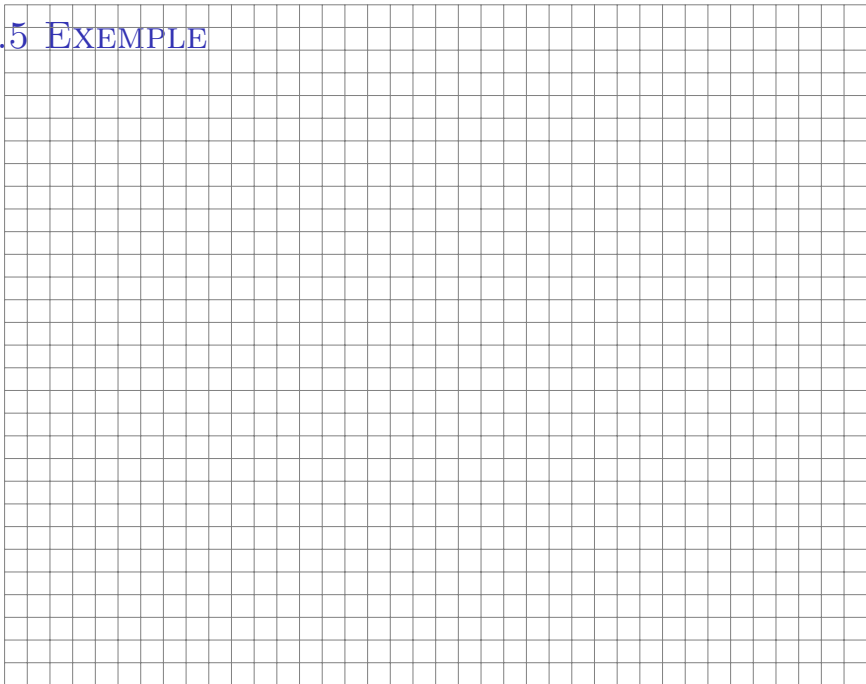
6.2.5 EXEMPLES

- ❶ Les matrices de réflexion sont orthogonales.
- ❷ Les matrices de rotation sont orthogonales.

❸ $U = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 36 & 48 & -80 \\ -80 & 60 & 0 \\ 48 & 64 & 60 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

C'est en fait la matrice d'une rotation d'axe $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $73,8^\circ$, pour le voir il faut diagonaliser U , sur $\mathbb{C}$!

6.2.5 EXAMPLE

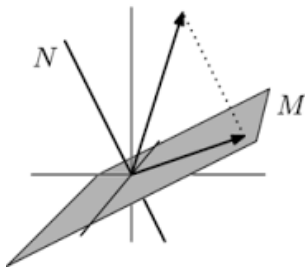


6.3.1 PROJECTION ORTHOGONALE

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ dont on dispose d'une base orthogonale $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$.

Pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ on cherche

- le vecteur $\hat{y} \in W$ tel que
- le vecteur $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$ est perpendiculaire à W .



6.3.1 CONSTRUCTION DE LA PROJECTION

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base orthogonale de W , sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME

Tout vecteur $\vec{y}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ où $\hat{y} \in W$ et $\vec{z} \in W^\perp$.

Preuve. Pour l'unicité, supposons que $\hat{y} + \vec{z} = \vec{y} = \hat{y}' + \vec{z}'$.

Alors $\hat{y} - \hat{y}' = \vec{z}' - \vec{z}$ est un vecteur de W et $W^\perp$. Il est donc nul, car orthogonal à lui-même : $\hat{y} = \hat{y}'$ et $\vec{z}' = \vec{z}$.

Pour démontrer l'existence, il suffit de poser

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k$$

6.3.1 FIN DE LA PREUVE



6.3.2 OBSERVATION

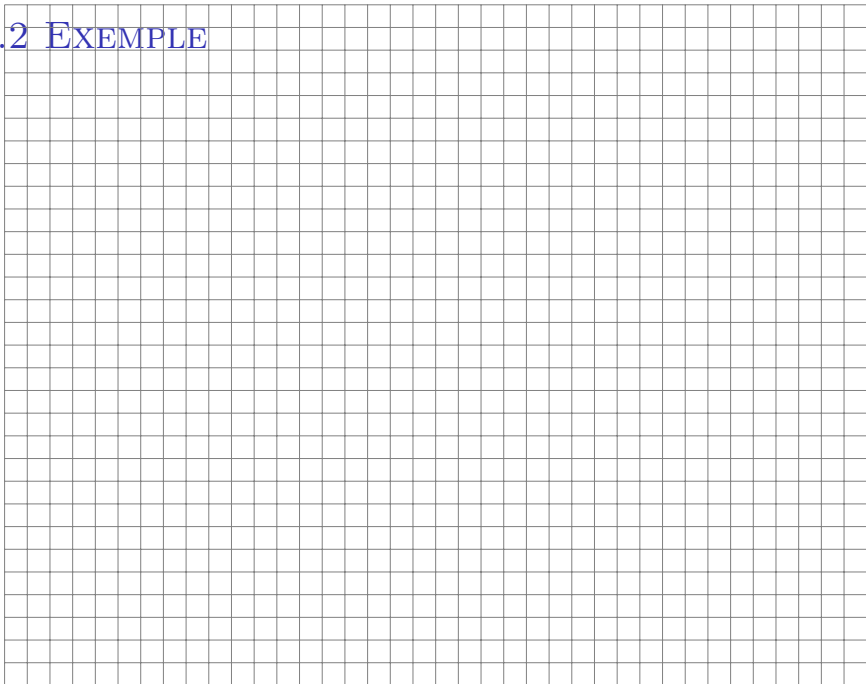
Pour calculer la projection orthogonale $\text{proj}_W \vec{y} = \hat{y}$ de $\vec{y}$ sur W , il faut connaître une base orthogonale de W , mais il n'est pas nécessaire d'avoir une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$ en entier.

Exemple. (Lay, Ex. 6.3.2, page 381). Soit

$$W = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On cherche $\hat{y} = \text{proj}_W \vec{y}$.

6.3.2 EXAMPLE



6.3.2 MÉTHODE

- ❶ Vérifier que la base de W est orthogonale ! I.e. $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ pour $i \neq j$.
- ❷ Calculer les normes **au carré** des vecteurs de base $\vec{u}_i$.
- ❸ Calculer les produits scalaires $\vec{y} \cdot \vec{u}_i$.
- ❹ Calculer la projection

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\|\vec{u}_k\|^2} \vec{u}_k$$

- ❺ Calculer $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y}$ et **vérifier** que $\vec{z} \perp W$.
- ❻ **Remarque.** Si $\vec{y} \in W$, alors $\hat{y} = \vec{y}$ et $\vec{z} = \vec{0}$.

6.3.3 PROJECTION, CAS D'UNE BASE ORTHONORMÉE

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base **orthonormée** de W , alors tous les $\vec{u}_i$ sont unitaires et

$$\begin{aligned}\text{proj}_W \vec{y} &= (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k \\ &= (\vec{u}_1^T \vec{y}) \vec{u}_1 + \dots + (\vec{u}_k^T \vec{y}) \vec{u}_k \\ &= U \begin{pmatrix} \vec{u}_1^T \vec{y} \\ \vdots \\ \vec{u}_k^T \vec{y} \end{pmatrix} = UU^T \vec{y}\end{aligned}$$

THÉORÈME

Soit U la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ d'une base **orthonormée** de W . Alors

$$\boxed{\text{proj}_W \vec{y} = UU^T \vec{y}}.$$

6.3.4 APPROXIMATION QUADRATIQUE

La distance minimale entre un vecteur $\vec{y}$ et un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$ est réalisée par $\vec{z} = \vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}$.

THÉORÈME

Pour tout $\vec{w} \in W$ on a $\|\vec{y} - \vec{w}\| \geq \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|$.

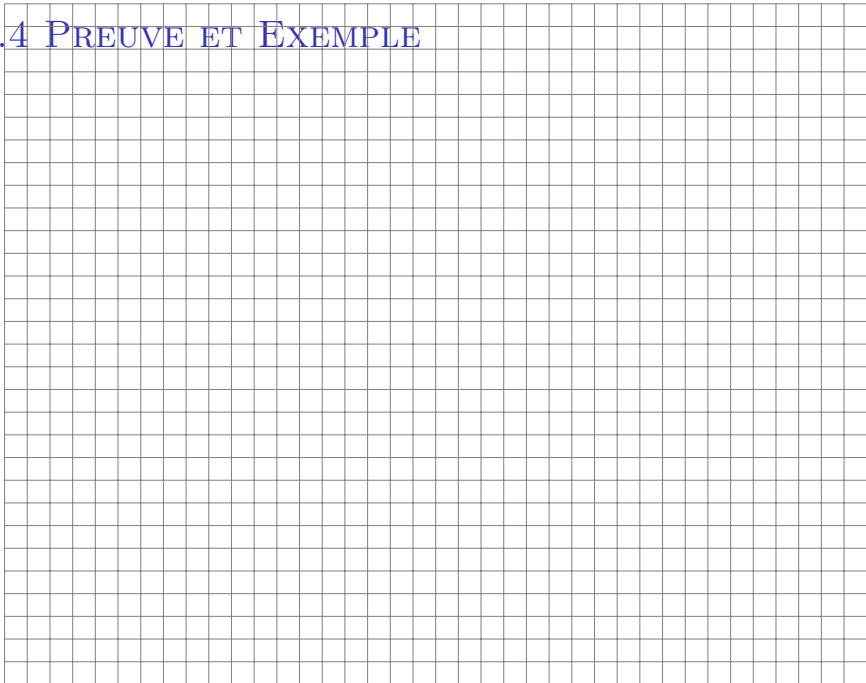
On appelle ce vecteur $\hat{y}$ la meilleure approximation **quadratique** de $\vec{y}$ dans W dans le sens où elle minimise le carré de la distance qui est calculée par la somme des carrées des coordonnées.

Preuve. L'idée est d'écrire un vecteur $\vec{w}$ de W de manière compliquée : $\vec{w} = \hat{y} + (\vec{w} - \hat{y})$, si bien que

$$\vec{y} - \vec{w} = \vec{y} - \hat{y} - (\vec{w} - \hat{y})$$

Or $\vec{y} - \hat{y} = \vec{z}$ est dans $W^\perp$ et $\vec{w} - \hat{y} \in W$.

6.3.4 PREUVE ET EXEMPLE



6.4.0 GRAM ET SCHMIDT



Gram (1850 - 1916) et Schmidt (1876 - 1959).

6.4.1 LE PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT

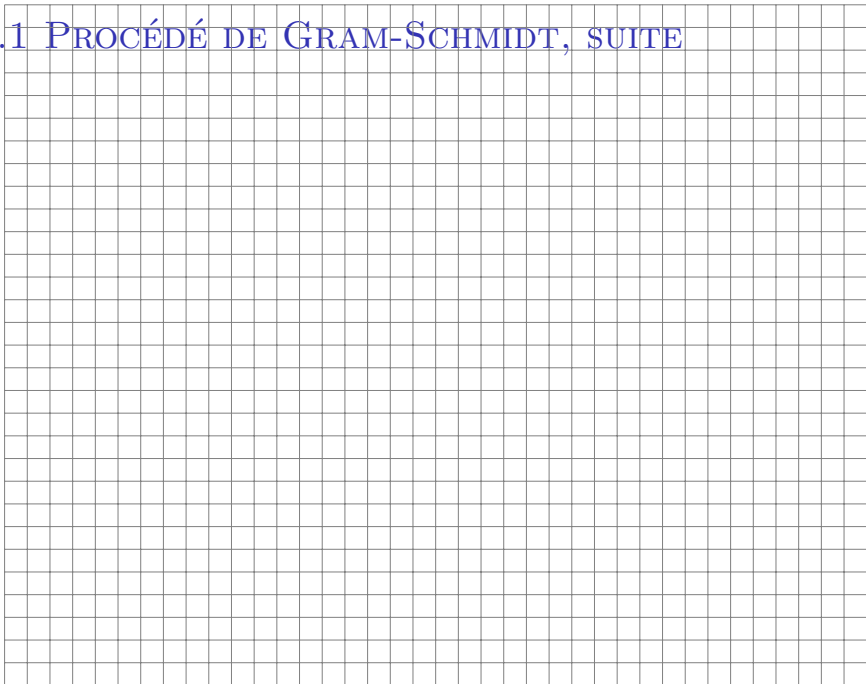
But. Trouver une base orthogonale ou orthonormée d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$.

Idée. Utiliser de manière inductive les projections orthogonales. On considère dans $\mathbb{R}^4$ l'hyperplan W donné par l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

- ❶ On cherche d'abord une base, par exemple celle proposée par la méthode de Gauss :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

6.4.1 PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT, SUITE



6.4.1 PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT, FIN

