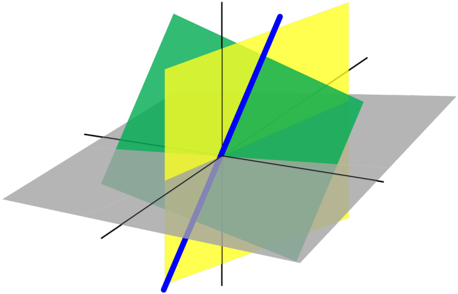
Algèbre Linéaire

Cours du 19 décembre

Jérôme Scherer



7.4.1 Décomposition en valeurs singulières

Soit A une matrice $m \times n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée. Alors T transforme la sphère unité de $\mathbb{R}^n$

$$S = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\overrightarrow{x}\| = 1\}$$

en un ellipsoïde de $\mathbb{R}^m$.

Remarque

L'étirement est maximal dans la direction de l'espace propre correspondant à la plus grande valeur propre de la matrice symétrique $B = A^T A$.

Lemme

Soit A une matrice $m \times n$ et $B = A^T A$. Les valeurs propres de B sont positives.

7.4.4 Valeurs singulières

On ordonne les valeurs propres de $B = A^T A$ de sorte que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

Définition

Les valeurs singulières de A sont les $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Remarque. On a $\sigma_i = \|Av_i\|$ où v_i est un vecteur propre unitaire de B pour la valeur propre λ_i.

7.4.5 L'image de A

Soit A une matrice de taille $m \times n$, $(v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres unitaires de $B = A^T A$ pour les valeurs propres $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$.

Théorème

Si A admet exactement r valeurs singulières non nulles, alors $(Av_1, \ldots, Av_r)$ est une base orthogonale de l'image de A.

Preuve. $(Av_i) \cdot (Av_j) = v_i^T A^T A v_j = v_i^T \lambda_j v_j = 0$ pour $i \neq j$.

En particulier $\|Av_i\|^2 = \lambda_i \|v_i\|^2 > 0$ et les vecteurs $Av_1, \ldots, Av_r$ sont orthogonaux, donc linéairement indépendants.

Ils engendrent $\mathrm{Im} A$ car $Av_{r+1} = \cdots = Av_n = 0$. $\square$

7.4.6 Décomposition en valeurs singulières

Une décomposition de A en valeurs singulières (SVD) est une factorisation $A = U\Sigma V^T$ telle que

1. U est orthogonale $m \times m$;
2. V est orthogonale $n \times n$;
3. $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est de taille $m \times n$.

Les lignes de U et de V sont appelés les vecteurs singuliers à gauche et à droite de A.

7.4.6 Existence de la SVD

1. On choisit $V = (\overrightarrow{v}_1 \cdots \overrightarrow{v}_n)$ où les $\overrightarrow{v}_i$ forment une base orthonormée de vecteurs propres de $B = A^T A$, classés dans l'ordre décroissant des valeurs propres λ_i.
2. On pose $\overrightarrow{u}_i = \dfrac{A\overrightarrow{v}_i}{\|A\overrightarrow{v}_i\|} = \dfrac{1}{\sigma_i} A\overrightarrow{v}_i$ pour $1 \leq i \leq r$.
3. On complète en une base orthonormée $(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_{r+1}, \ldots, \overrightarrow{u}_m)$ de $\mathbb{R}^m$ et on pose $U = (\overrightarrow{u}_1 \cdots \overrightarrow{u}_m)$.
4. On calcule $U\Sigma = (\sigma_1 \overrightarrow{u}_1, \ldots, \sigma_r \overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{0}, \ldots, \overrightarrow{0}) = A(\overrightarrow{v}_1 \cdots \overrightarrow{v}_n) = AV$.
5. $U\Sigma V^T = AVV^T = A$.

7.4.3 Exemple

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. L'image de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ est une ellipse dans $\mathbb{R}^2$.

$$B = A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c_B(t) = -t(t-25)(t-9)$$

$$E_{25} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

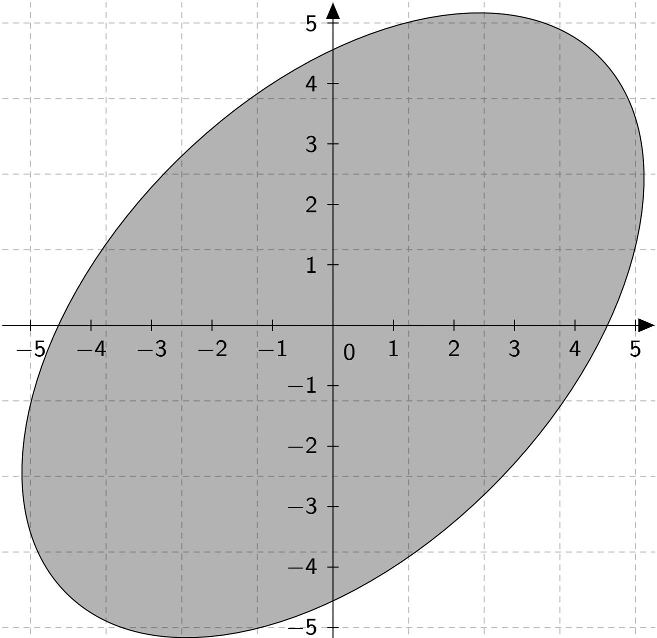
7.4.3 Calcul, suite

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}/2 \\ 5\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est l'image par T d'un vecteur unitaire (de la sphère unité). Il est de longueur maximale (5) et correspond au grand axe de l'ellipse ci-dessous.

1. $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 0$.
2. $E_9 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/6 \\ -\sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{v}_2\}$
3. $A\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

7.4.4 Grand axe et petit axe



7.4.6 Exemple, fin

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = A^T A$. Alors $E_0 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\}$.

Donc $V = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 & 2/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/6 & -2/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

On connaît déjà $U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

et enfin $\Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. On a bien $U\Sigma V^T = A$

7.4.7 Commentaires

1. Fonctionne pour des matrices non diagonalisables, même rectangulaires !
2. Utile pour des applications numériques. Les matrices U et V étant orthogonales, l'estimation de l'erreur ou de l'imprécision est dans Σ uniquement.
3. Utile en statistiques (PCA).
4. Utile pour la compression de données

7.4.7 Compression des données

Exemple trouvé chez http ://andrew.gibiansky.com/blog/

Une photo (d'un tigre) est codée par une matrice A de rang 500.

Chacune des images suivantes est produite en remplaçant la matrice

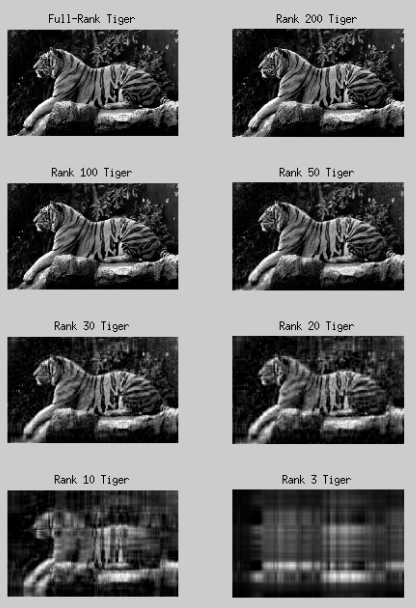
$$A = U\Sigma V^T$$

par la meilleure approximation possible de rang m, c'est-à-dire

$$U\Sigma_m V^T$$

où Σ_m est la matrice Σ_m est obtenue en ne gardant que les m premières valeurs singulières (les plus grandes) :

7.4.7 Compression des données



A.21 Calculs dans $\mathbb{F}_{25}$

Soit $\mathbb{F}_5$ le corps à cinq éléments et $\mathbb{F}_5[t]$ l'anneau des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients dans $\mathbb{F}_5$. Soit encore $p(t) = t^2 + t + 1$ et A la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_5)$.

(1) (1 point) Montrer que $p(t)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_5[t]$.

A.21 Calculs dans $\mathbb{F}_{25}$, suite

(2) (2 points) Soit $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[t]/(p(t))$, le corps à 25 éléments des restes de la division polynomiale par $p(t)$. Décomposer $p(t)$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{F}_{25}[t]$.

A.21 Calculs dans $\mathbb{F}_{25}$, suite

(3) (1 point) A n'est pas diagonalisable dans $M_{2\times 2}(\mathbb{F}_5)$.

(4) (4 points) Montrer que A est diagonalisable dans $M_{2\times 2}(\mathbb{F}_{25})$.

A.21 Calculs dans $\mathbb{F}_{25}$, fin

Programme de cette année (liste non exhaustive !)

A. Méthode de Gauss : échelonner

1. Déterminer si un système d'équations est compatible.
2. Déterminer si un système d'équations possède aucune, une ou une infinité de solutions.
3. Déterminer la dimension de la solution générale (nombre de paramètres).
4. Calculer le rang d'une application linéaire.
5. Calculer la dimension du noyau d'une application linéaire.

Méthode de Gauss : réduire

1. Calculer la solution explicite d'un système d'équations.
2. Calculer explicitement le noyau d'une matrice, en donner une base.
3. Calculer explicitement une base de l'image d'une application linéaire.
4. Inverser une matrice.

Opérations sur les lignes/colonnes

1. Calculer un déterminant (linéarité comme fonction d'une ligne ou une colonne).
2. Calculer une aire ou un volume.
3. Factorisation LU.
4. Extraire une base d'une famille de vecteurs.
5. Vérifier qu'une famille de vecteurs est libre.
6. Compléter en une base une famille de vecteurs libres.
7. Vérifier qu'une famille de vecteurs est génératrice.

Matrice d'une application linéaire

Soit $T : V \to W$.

1. Choisir une base $\mathcal{B}$ de V et une base $\mathcal{C}$ de W.
2. Calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.
3. Ce sont les colonnes de la matrice de T.
4. Exemple : matrice de changement de base (pour $T = Id$).
5. Théorème du rang.
6. Étude de l'injectivité et de la surjectivité de T

Espaces vectoriels

1. Reconnaître des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. Travailler avec les sous-espaces : noyau, espace-lignes, espace-colonnes
3. Calcul de la dimension d'un sous-espace

Diagonalisation

Soit A une matrice carrée.

1. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.
2. Calculer les valeurs propres (réelles ou complexes) et les espaces propres.
3. Trouver si possible une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres.
4. Ecrire la matrice de changement de base $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}an}$.
5. Calculer la matrice de changement de base inverse.
6. $D = P^{-1}AP$.

Diagonalisation, variantes

1. Calcul des puissances d'une matrice.

2. Au lieu de commencer avec une matrice A, construire la matrice de $T : W \to W$ pour le choix d'une base $\mathcal{B}$ de W.

Gram-Schmidt

1. Produit scalaire standard, norme et orthogonalité.
2. Formules pour la projection orthogonale (pour une base orthogonale ou orthonormée !)
3. Formules pour Gram-Schmidt.
4. Méthode des moindres carrées.
5. Factorisation QR
6. Droite de régression linéaire

Orthodiagonalisation

1. Matrices orthogonales.
2. Matrices symétriques et formes bilinéaires.
3. Critère d'orthodiagonalisation.
4. Théorème spectral

Sujets propres à ce cours

1. Formules de Cramer
2. Produits scalaires non standards
3. Décomposition en valeurs singulières (SVD)
4. Interprétation du Théorème spectral
5. Corps finis : le corps $\mathbb{F}_p$ des entiers modulo p
6. Corps finis : construction de $\mathbb{F}_{p^2}$ et $\mathbb{F}_{p^3}$
7. Corps finis : calcul de produit et d'inverse dans $\mathbb{F}_{p^2}$ et $\mathbb{F}_{p^3}$
8. Corps finis : algèbre linéaire sur $\mathbb{F}_p$ et $\mathbb{F}_{p^2}$