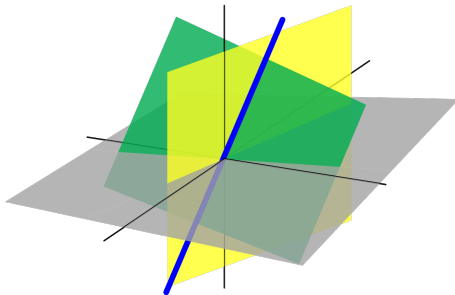


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU JEUDI 5 DÉCEMBRE

Jérôme Scherer



6.2 ORTHOGONALITÉ : RAPPELS

Soit A une matrice de taille $n \times m$. Alors A^T est de taille $m \times n$.

- ❶ Les lignes de A^T sont les **colonnes** $\vec{a}_i$ de A ;
- ❷ $A^T \vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{x} \perp \text{Im}A$;
- ❸ Les coefficients $(A^T A)_{ij}$ sont les produits scalaires $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$;
- ❹ Les colonnes de A sont orthogonales si et seulement si $A^T A$ est diagonale ;
- ❺ Les coefficients de AA^T sont les produits scalaires des **lignes** de A ;
- ❻ Les lignes de A sont orthogonales si et seulement si AA^T est diagonale.

6.4.1 LE PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT

But. Trouver une base orthogonale ou orthonormée d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$.

Idée. Utiliser de manière inductive les projections orthogonales. On considère dans $\mathbb{R}^4$ l'hyperplan W donné par l'équation $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

- ❶ On cherche d'abord une base, par exemple celle proposée par la méthode de Gauss :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

6.4.1 LE PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT

- 1 On a donc une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ de W .
- 2 On pose $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$, il faut bien commencer quelque part.
- 3 On calcule la projection orthogonale de $\vec{b}_2$ sur $\text{Vect}\{\vec{c}_1\}$:

$$\hat{b}_2 = \frac{\vec{c}_1 \cdot \vec{b}_2}{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1} \vec{c}_1 = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

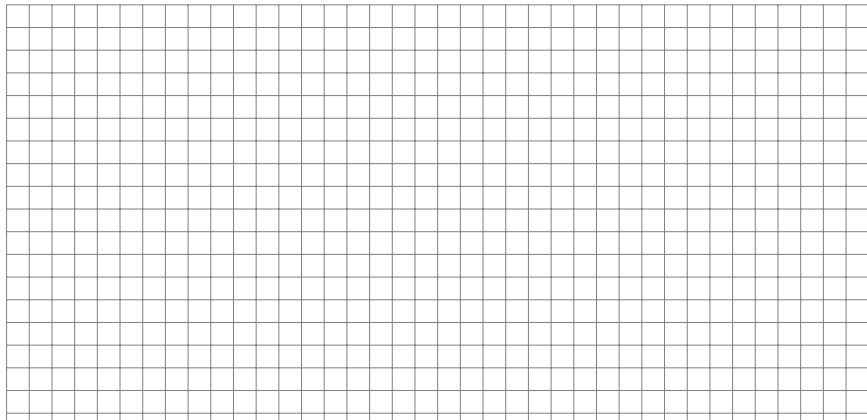
- 4 On change $\vec{b}_2$ pour le rendre orthogonal à $\vec{c}_1$:

$$\vec{b}_2 - \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.4.1 EXEMPLE, SUITE

Maintenant que nous avons une base orthogonale du plan

$V = \text{Vect}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, à savoir $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$, les formules de projection sont à notre disposition pour calculer $\hat{b}_3 = \text{proj}_V \vec{b}_3$ et $\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \hat{b}_3$.



6.4.1 EXEMPLE, FIN

Nous avons ainsi construit une base orthogonale

$\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ de W . Elle jouit des propriétés suivantes :

- ❶ Le vecteur $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$;
- ❷ Le vecteur $\vec{c}_k$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$, en particulier c'est un vecteur de W ;
- ❸ On voit inductivement que $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$, si bien que $\mathcal{C}$ est une base de W .

6.4.2 LE PROCÉDÉ DE GRAM-SCHMIDT : THÉORIE

But. Trouver une base orthogonale ou orthonormée d'un sous-espace W de $\mathbb{R}^n$.

Idée. Utiliser de manière inductive les projections orthogonales.

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base de W , sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME

Les vecteurs suivants forment une base orthogonale de W .

$$\textcircled{1} \quad \vec{v}_1 = \vec{u}_1;$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1;$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{v}_k = \vec{u}_k - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \dots - \frac{\vec{u}_k \cdot \vec{v}_{k-1}}{\|\vec{v}_{k-1}\|^2} \vec{v}_{k-1}.$$

6.4.3 DÉMONSTRATION

Pour construire $\vec{v}_2$ on soustrait à $\vec{u}_2$ sa projection orthogonale sur le sous-espace $W_1 = \text{Vect}\{\vec{v}_1\}$, pour ne garder que la composante orthogonale à W_1 .

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1$$

Pour construire $\vec{v}_{i+1}$ on soustrait à $\vec{u}_{i+1}$ sa projection orthogonale sur le sous-espace $W_i = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i\}$, pour ne garder que la composante orthogonale à W_i . La famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i\}$ est orthogonale, les formules s'appliquent !

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{u}_{i+1} - \frac{\vec{u}_{i+1} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \dots - \frac{\vec{u}_{i+1} \cdot \vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|^2} \vec{v}_i$$

6.4.4 LA FACTORISATION QR

Une interprétation de l'algorithme de Gram-Schmidt se fait sous forme de factorisation, que nous retrouverons dans la section suivante sur la méthode des moindres carrés.

DÉFINITION

Soit A une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont libres. Alors il existe une factorisation $A = QR$ où les colonnes de $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sont **orthonormées** et $R \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure et inversible avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

Preuve. On applique par exemple la méthode Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale $\mathcal{Q}$ de $\text{Im}A$ à partir des colonnes de A (sans en changer l'ordre), puis on normalise les vecteurs. On forme Q avec ces vecteurs (colonnes).

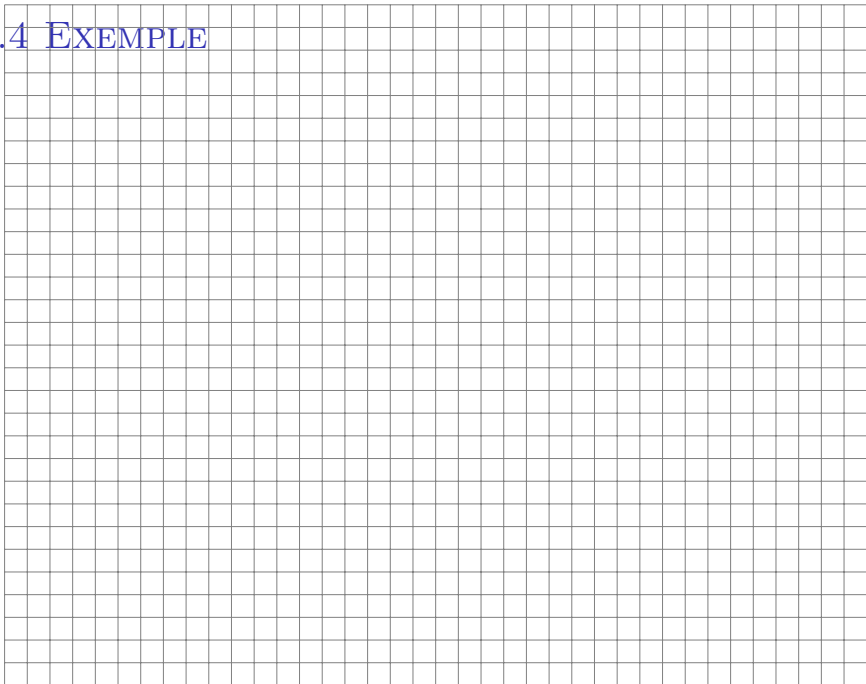
6.4.4 LA FACTORISATION QR

La k -ème colonne de A est combinaison linéaire des k premières colonnes de Q et le dernier coefficients est toujours positif. On constate cela en utilisant les formules du Gram-Schmidtage, ou alternativement on se souvient que la base orthogonale construite consiste à soustraire à $\vec{a}_k$ sa projection orthogonale sur l'espace engendrés par les colonnes précédentes. Après normalisation le k -ème coefficient reste positif.

La matrice R a pour colonnes ces coefficients : $\vec{r}_k = (\vec{a}_k)_Q$. $\square$

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche sa factorisation QR .

6.4.4 EXAMPLE



6.5.1 MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

On cherche la “meilleure solution possible” d’un système **incompatible** $A\vec{x} = \vec{b}$, où A est une matrice $m \times n$.

DÉFINITION

Un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est une **solution au sens des moindres carrés** pour le système $A\vec{x} = \vec{b}$ si, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{b} - A\hat{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{x}\|$$

Comme $A\vec{x} \in \text{Im}A$, le système est incompatible si $\vec{b} \notin \text{Im}A$.

Le vecteur le plus proche de $\vec{b}$ dans $\text{Im}A$ est sa projection orthogonale

$$\hat{b} = \text{proj}_{\text{Im}A} \vec{b}$$

6.5.1 MOINDRES CARRÉS : PROBLÈME ÉQUIVALENT

Pour trouver les solutions $\hat{x}$ du système incompatible

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

au sens des moindres carrés, il faut résoudre le système

$$A\hat{x} = \hat{b}$$

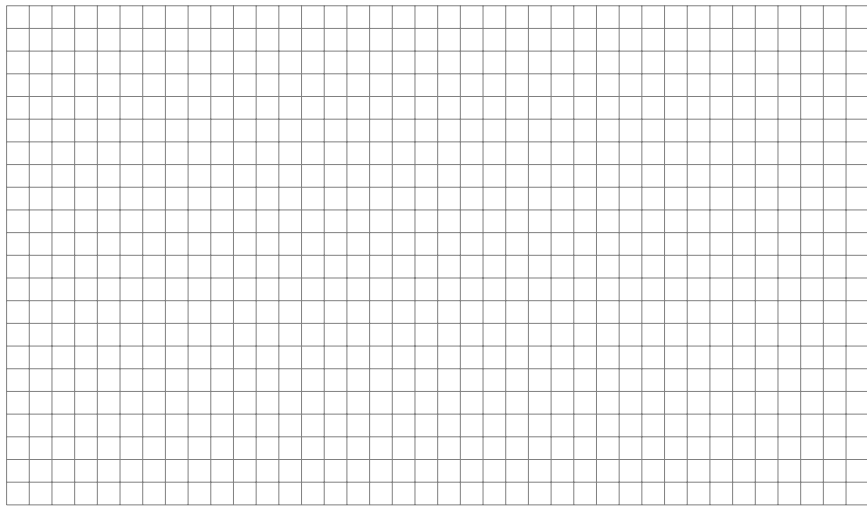
REMARQUE

Il y a en général une infinité de solutions au sens des moindres carrés, à moins que l'application linéaire représentée par A ne soit injective.

Sans calculer $\hat{b}$ que peut-on faire ?

6.5.1 MOINDRES CARRÉS : PROBLÈME ÉQUIVALENT

Supposons que $\hat{x}$ soit solution au sens des moindres carrés, si bien que $A\hat{x} = \hat{b} = \text{proj}_{\text{Im}A} \vec{b}$.



6.5.2 EQUATION NORMALE

THÉORÈME

L'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés est égal à l'ensemble non-vidé des solutions de l'équation normale :

$$A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$$

Preuve. Soit $\hat{x}$ une solution de l'équation normale. Nous devons montrer que $A\hat{x} = \hat{b}$. Nous savons que $A^T(\vec{b} - A\hat{x}) = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{z} = \vec{b} - A\hat{x}$ est donc orthogonal à $\text{Im}A$. Mais alors

$$\vec{b} = A\hat{x} + \vec{z}$$

avec $A\hat{x} \in \text{Im}A$ et $\vec{z} \in (\text{Im}A)^\perp$. Cette écriture est **unique** : Ainsi $A\hat{x} = \hat{b}$. □

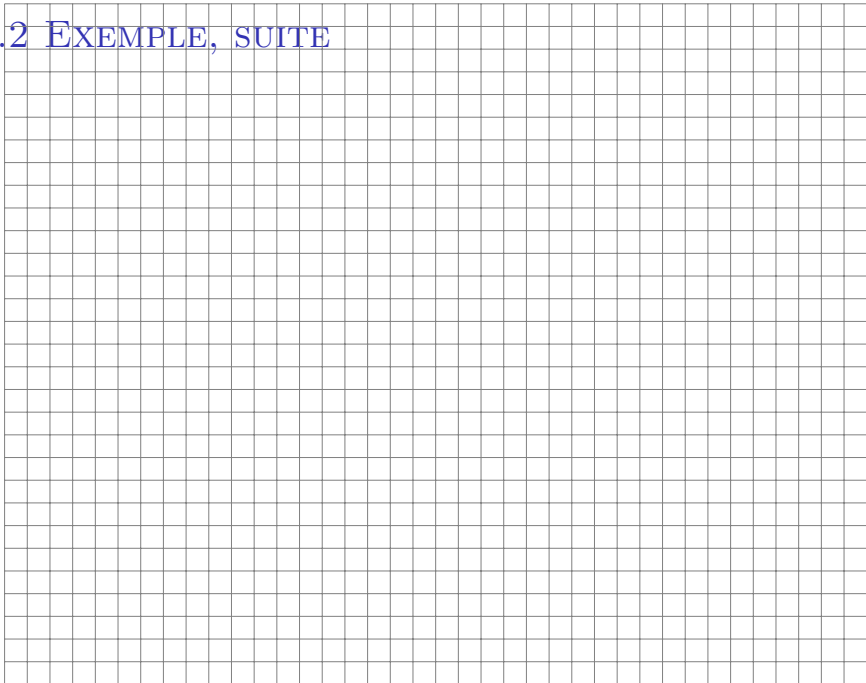
6.5.2 EXEMPLE

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On cherche **toutes** les solutions au sens des moindres carrés de l'équation incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$.

On résout donc l'équation normale $A^T A \hat{x} = A^T \vec{b}$.

6.5.2 EXEMPLE, SUITE



6.5.2 EXAMPLE, FIN



6.5.3 QUESTION DE L'UNICITÉ

Soit $\hat{x}$ une solution au sens des moindres carrés du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

DÉFINITION

La norme du vecteur $\vec{b} - A\hat{x}$ est appelée **écart quadratique**.

THÉORÈME

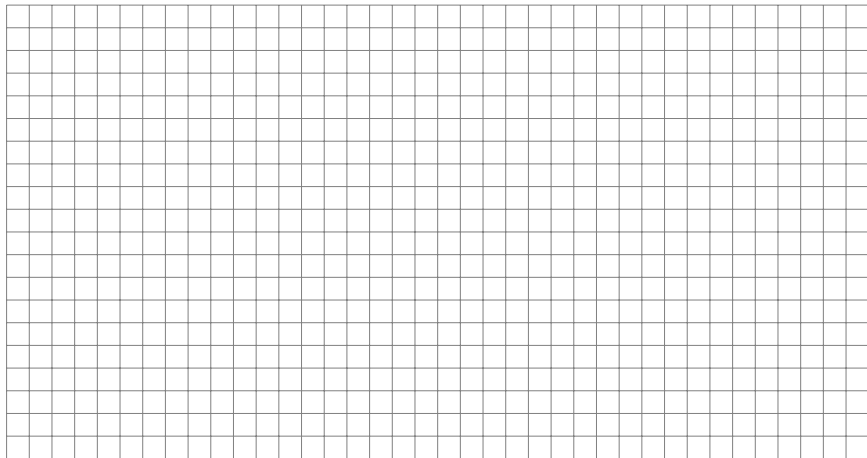
La solution $\hat{x}$ au sens des moindres carrées est unique si et seulement si les colonnes de A sont libres, ce qui est équivalent à exiger que la matrice $A^T A$ est inversible.

Si $A^T A$ est inversible, alors on tire de $A^T A\hat{x} = A^T \vec{b}$ que

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

6.5.3 PREUVE

Supposons d'abord que les colonnes de A sont libres, si bien que le noyau de A est nul. On va montrer que la matrice carrée $A^T A$ est inversible en prouvant que son noyau est nul aussi.



6.5.3 EXEMPLE

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solutions au sens des moindres carrés de l'équation incompatible $A\vec{x} = \vec{b}$ est unique puisque les colonnes de A sont libres.

On préfère la méthode plus efficace de l'équation normale !

$$\text{On calcule } A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$$

On calcule encore

$$\hat{b} = A^T \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

6.5.3 EXAMPLE, FIN



A.9 LE CORPS $\mathbb{F}_4$

Nous avons rencontré les corps $\mathbb{F}_p$ qui ont un nombre p , premier, d'éléments. Il s'agit des nombres entiers **modulo p** que l'on considère comme les restes possibles de la division par p .

REMARQUE

Les entiers modulo 4 ne forment pas un corps car $2 \cdot 2 = 0$. Le produit $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ non plus car $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

Nous allons maintenant remplacer les entiers par les polynômes $\mathbb{F}_2[t]$ et la division euclidienne par la division polynomiale.

- 1 Les restes de la division par un polynôme de degré un sont de degré 0, il n'y a donc que 0 et 1...
- 2 On choisit donc un polynôme de degré 2.

A.9 LE CORPS $\mathbb{F}_4$

Les restes de la division par un polynôme de degré 2 sont de degré plus petit, on travaille donc dans l'ensemble

$$\{0, 1, t, t + 1\}$$

Nous connaissons tous les polynômes de degré 2, il s'agit de $t^2 = t \cdot t$, $t^2 + t = t \cdot (t + 1)$, $t^2 + 1 = (t + 1)^2$ et $t^2 + t + 1$.

REMARQUE

Si on choisit un polynôme non irréductible, le résultat n'est pas un corps, car il existe deux restes non nuls dont le produit est nul.

DÉFINITION

Soit $p(t) = t^2 + t + 1$. La somme et le produit de restes de division par $p(t)$ font de $\{0, 1, t, t + 1\}$ un corps à quatre éléments, $\mathbb{F}_4$.

A.10 L'ADDITION DANS $\mathbb{F}_4$

L'addition est donnée par l'addition des polynômes :

+	0	1	t	t + 1
0	0	1	t	$t + 1$
1	1	0	$t + 1$	t
t	t	$t + 1$	0	1
t + 1	$t + 1$	t	1	0

- ❶ La symétrie de la table montre la commutativité.
- ❷ Les zéros dans la diagonale montrent que chaque élément est son opposé.

A.11 LA MULTIPLICATION DANS $\mathbb{F}_4$

Le produit est donnée par le produit des polynômes :

+	0	1	t	t + 1
0	0	0	0	0
1	0	1	t	t + 1
t	0	t	t + 1	
t + 1	0	t + 1		

Calculons $t \cdot t$ et les autres produits manquants. La clé de ces calculs est le fait que $t^2 + t + 1 = 0$ puisque le reste de la division d'un polynôme par lui-même est zéro. Ainsi

$$t^2 = t + 1$$

A.11 QUELQUES PRODUITS



The page contains a large grid of graph paper, consisting of 20 columns and 25 rows of small squares, intended for mathematical work.