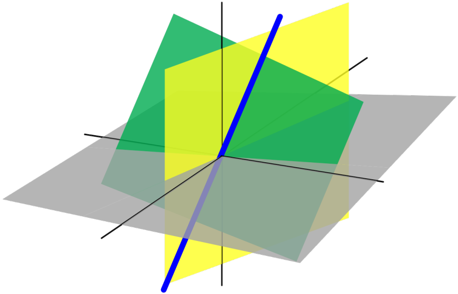
Algèbre Linéaire

Cours du 26 septembre

Jérôme Scherer



1.8 Applications linéaires

Soient V et W des espaces vectoriels. On considère une transformation (application) $T : V \to W$. Elle associe à tout vecteur v de V un vecteur Tv de W.

Définition

L'application T est linéaire si, pour tous u, v de V et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $T(u + v) = Tu + Tv$;
2. $T(\alpha v) = \alpha(Tv)$.

Soit A une matrice $m \times n$. Alors la transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donnée par la multiplication matricielle

$$\overrightarrow{v} \mapsto A\overrightarrow{v}$$

est linéaire.

1.8.1 Exemples

1. L'application $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ qui projette $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. L'homothétie de rapport 3 dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. La symétrie d'axe Ox dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.8.2 Propriétés

Proposition

Soit T une application linéaire. Alors

1. $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$;
2. $T(0) = 0$.

Preuve. On calcule sans réfléchir !

$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha u) + T(\beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$$

et d'autre part

$$T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$$

1.8.3 Autres exemples

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ est linéaire.
2. $T : \mathbb{P}_n \to \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $T(p) = p(t)$ est linéaire.
3. $T_\lambda : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T_\lambda(p) = p(\lambda)$ est linéaire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En particulier l'évaluation en zéro est linéaire : $T_0(at^2 + bt + c) = c$.

1.9 La matrice d'une application linéaire

Slogan

Toutes les applications linéaires sont représentées par des matrices.

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On choisit les vecteurs

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ils engendrent $\mathbb{R}^n$ puisque $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$. C'est la seule combinaison linéaire qui donne $\overrightarrow{x}$ car les $\overrightarrow{e_i}$ sont libres.

1.9.1 Construction de la matrice

Slogan

Si on connaît les vecteurs $T\overrightarrow{e_i}$, alors on connaît T.

On pose $\overrightarrow{a_i} = T\overrightarrow{e_i}$ et on forme la matrice $m \times n$

$$\boxed{A = (\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_n})}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^n$ on peut écrire

$$\begin{aligned} T\overrightarrow{x} &= T(x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}) \\ &= x_1 T\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n T\overrightarrow{e_n} \\ &= x_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{a_n} = A\overrightarrow{x} \end{aligned}$$

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Il existe alors une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que $T\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x}$.

1.9.2 Exemples

Slogan

Les colonnes de la matrice de T sont les images des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$.

Quelles sont toutes les applications linéaires $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Elles sont données par une matrice 1×1, c'est-à-dire par un seul nombre réel a. Ici $\overrightarrow{e_1} = (1)$ et ainsi

$$\boxed{Tx = ax}$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, la rotation d'axe Ox et d'angle 90^o est linéaire. Quelle est sa matrice ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple : matrice de rotation.

1.9.3 Problème d'existence

Définition

Une application $T : V \to W$ est surjective si tout vecteur b de W est l'image d'au moins un vecteur de V.

En termes mathématiques. Pour tout $b \in W$, il existe $v \in V$ tel que $Tv = b$.

Lorsque $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire, représentée par la matrice A, cela signifie que le système

$$\boxed{A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}}$$

a toujours au moins une solution pour tout $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$.

1.9.4 Problème d'unicité

Définition

Une application $T : V \to W$ est injective si tout vecteur b de W est l'image d'au plus un vecteur de V.

En termes mathématiques. Si $Tv = b = Tw$, alors $v = w$.

Lorsque $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire, représentée par la matrice A, cela signifie que le système

$$\boxed{A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}}$$

est soit incompatible, soit admet une unique solution.

1.9.5 Exemple

On étudie l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut savoir si T est surjective ? injective ?

1.9.6 Critère d'injectivité

Théorème

Une application linéaire $T : V \to W$ est injective si et seulement si la seule solution de $Tx = 0$ est $x = 0$.

Preuve. Si T est injective, il y a au plus un vecteur v tel que $Tv = b$ pour tout choix de vecteur b. C'est donc vrai en particulier pour $b = 0$!

Reste à voir : si $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, alors T est injective.

Remarque

Dans la pratique c'est toujours ce critère que l'on vérifie pour montrer qu'une application linéaire est injective.

Fin de la preuve.

1.9.7 Critères matriciels

Théorème

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A sa matrice. Alors

1. T est surjective si et seulement si les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ (il y a un pivot dans chaque ligne de A) ;
2. T est injective si et seulement si les colonnes de A sont libres (il y a un pivot dans chaque colonne de A).

Preuve. On utilise deux fois le fait que $A\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{a}_1 + \cdots + x_n\overrightarrow{a}_n$.

1. L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est toujours compatible si et seulement les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$ (par définition).

2. L'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ a une solution unique si et seulement si les colonnes de A sont libres. $\square$

1.9.8 Prototypes

Que peut-on dire des matrices suivantes, échelonnées et réduites :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.9.8 Un exemple

On considère l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par la formule

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 0 \\ x_1 - 3x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

1. Est-elle linéaire ?
2. Est-elle injective ?
3. Est-elle surjective ?

Résolution.

1.9.8 Exemple

On considère l'application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la formule

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

1. Est-elle linéaire ?
2. Est-elle injective ?
3. Est-elle surjective ?

Résolution.

2.1.1 Les matrices : notation

Soit A une matrice $m \times n$. Nous avons souvent noté ses colonnes $\overrightarrow{a_j}$ pour écrire

$$A = (\overrightarrow{a_1} \dots \overrightarrow{a_n})$$

Chaque colonne est un vecteur

$$\overrightarrow{a_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ si bien que } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On note aussi parfois simplement $\boxed{A = (a_{ij})_{m \times n}}$, ou même $A = (a_{ij})$ lorsque la taille de la matrice est claire.

2.1.1 Les matrices : terminologie

Définition

La matrice nulle est la matrice $(0)_{m \times n}$ dont tous les coefficients sont nuls. Une matrice carrée est une matrice de taille $n \times n$.

La diagonale d'une matrice A est constituée des coefficients *diagonaux* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$. Une matrice carrée est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. C'est le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Somme

Soient A et B deux matrices $m \times n$. Alors la somme $A + B$ est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$.

2.1.2 La somme de matrices

La somme $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

n'a pas de sens ! Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Propriétés de l'addition

a. Commutativité : $A + B = B + A$;
b. Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$;
c. Matrice nulle : $A + (0) = A = (0) + A$;
d. Opposé : La matrice $-A = (-a_{ij})$ est l'opposé de A.

2.1.3 L'action

Action

Soit A une matrice $m \times n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αA est la matrice (αa_{ij}).

Exemple. $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Propriétés de l'action

(E) Distributivité I : $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

(F) Distributivité II : $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;

(G) Compatibilité : $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

(H) Unité : $1 \cdot A = A$.

2.1.4 Espaces vectoriels de matrices

Proposition

Les matrices de taille $m \times n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ forment un espace vectoriel.

Exemple

L'ensemble $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - d = 0 = c \right\}$ est un sous-espace de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1. la matrice nulle appartient à W ;
2. la somme est stable ;
3. l'action est stable.

Preuve.

2.1.5 Le produit matriciel

Soit $A = (a_{ik})$ une matrice $m \times n$ et $B = (b_{kj})$ une matrice $n \times p$.

Slogan 1

On multiplie les matrices lignes par colonnes.

Le coefficient (i, j) de $A \cdot B$ est donc

$$(A \cdot B)_{ij} = (a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

On peut écrire cela grâce au produit "matrice fois vecteur" (1.4) :

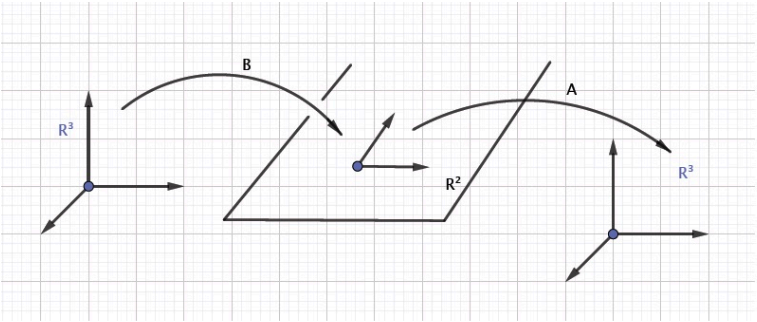
$$\boxed{A \cdot B = A \cdot (\overrightarrow{b}_1 \dots \overrightarrow{b}_p) = (A\overrightarrow{b}_1 \dots A\overrightarrow{b}_p)}$$

Exemple.

2.1.5 Produit et composition

Slogan 2

Le produit matriciel représente la composition des applications linéaires.



Preuve.

2.1.5 Exemple : Composition de rotations

Soit $R_{60} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ la matrice de rotation de 60^o.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de rotation de 120^o.

En général le calcul $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta}$ permet de retrouver les formules d'addition des angles :

$$\boxed{\cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta}$$

$$\boxed{\sin(\phi+\theta) = \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta}$$

Preuve.