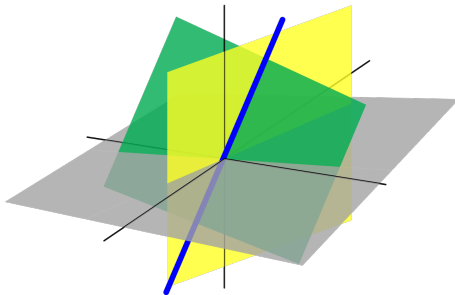


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 24 SEPTEMBRE

Jérôme Scherer

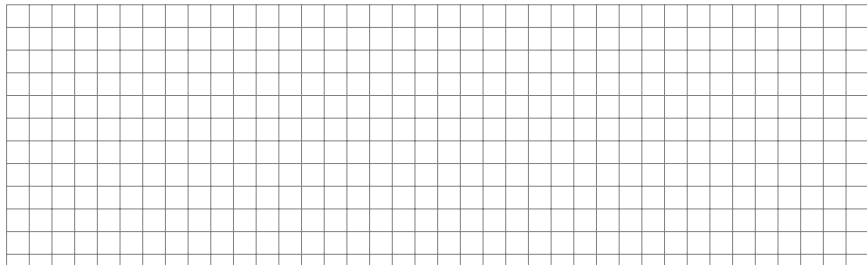


FIN DU DEUXIÈME EXEMPLE.

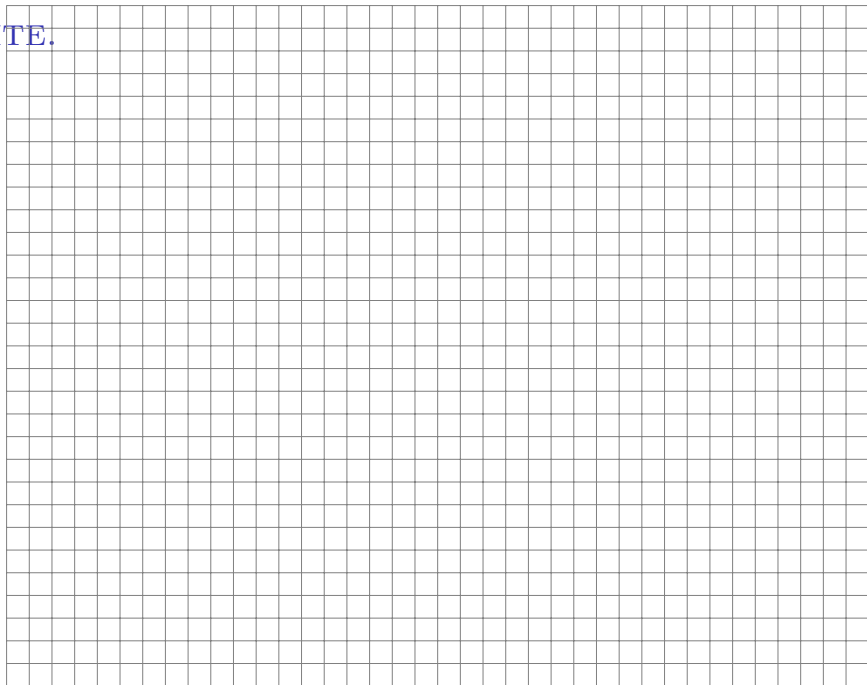
Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre et W l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche les valeurs de a pour lesquelles W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.



SUITE.



RAPPELS

DÉFINITION

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Une **combinaison linéaire** de ces vecteurs est un vecteur de la forme

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$$

pour des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires est appelé

sous-espace engendré par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ et on le note

$\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Le sous-espace engendré par un vecteur non nul est une droite passant par l'origine, deux vecteurs non colinéaires engendrent un plan, etc.

1.7.1 INDÉPENDANCE LINÉAIRE

DÉFINITION

On dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ d'un espace vectoriel V sont **libres** ou **linéairement indépendants** si la seule solution du système vectoriel

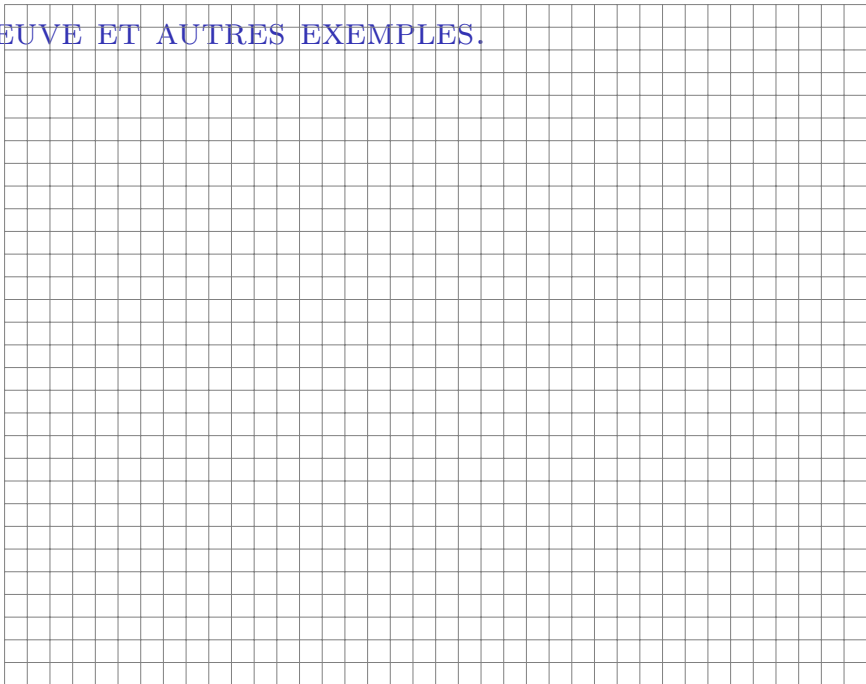
$$x_1 \cdot v_1 + \dots + x_k \cdot v_k = 0$$

est la solution triviale $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas libre, on dit que les vecteurs sont **liés** ou **linéairement dépendants**.

Exemple. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres.

PREUVE ET AUTRES EXEMPLES.



1.7.2 TERMINOLOGIE

Si les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ sont liés, il existe par définition des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

et au moins l'un de ces α_i est non nul !

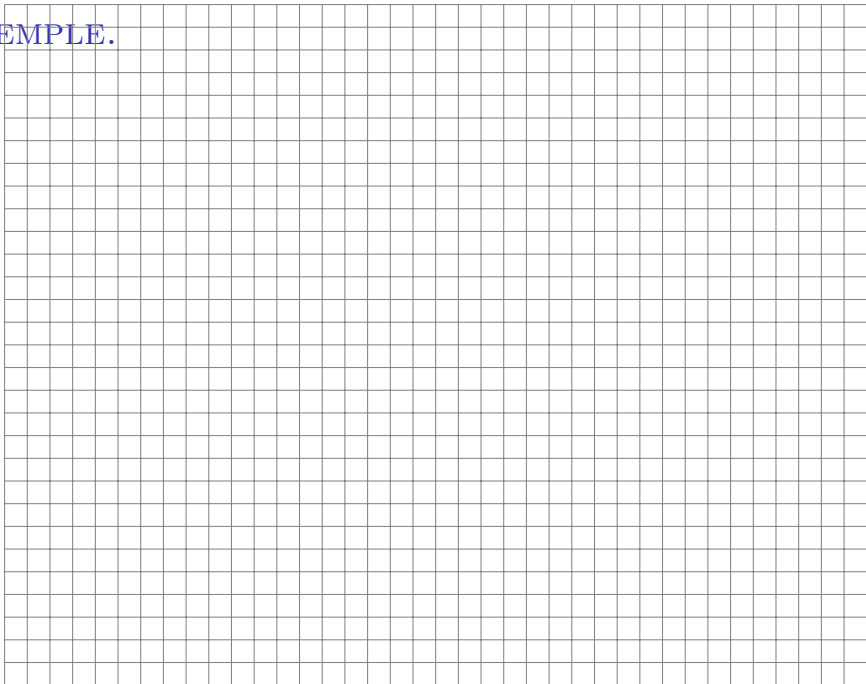
$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \dots - \alpha_k v_k$$

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k$$

On dit que v_i **dépend linéairement** des autres vecteurs. Attention !

Ce n'est pas forcément vrai pour chaque v_i .

EXAMPLE.



1.7.3 CAS PARTICULIERS

LE CAS $k = 1$

Un vecteur v est linéairement indépendant si et seulement si il est non nul.

En effet si $v = 0$, alors le système $x \cdot v = 0$ admet une infinité de solutions. Par contre, si $v \neq 0$, alors la seule solution est $x = 0$.

PROPOSITION

Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

Preuve. On a toujours $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$. □

LE CAS $k = 2$

Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

DÉMONSTRATION

Supposons que les vecteurs sont colinéaires, disons $\vec{w} = \alpha \vec{v}$. Alors

$$\alpha \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$$

est une combinaison linéaire qui donne le vecteur nul.

Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants. Il existe alors une combinaison linéaire

$$\alpha \vec{v} + \beta \vec{w} = \vec{0}$$

et au moins l'un des coefficients α ou β est non nul.

$$\textcircled{1} \quad \alpha \neq 0, \text{ alors } \vec{v} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{w}; \quad \textcircled{2} \quad \beta \neq 0, \text{ alors } \vec{w} = -\frac{\alpha}{\beta} \vec{v}.$$

1.7.4 UNICITÉ DES SOLUTIONS

PROPOSITION

Soit A une matrice $m \times n$. Alors le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet comme unique solution $\vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

En effet si $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sont les colonnes de A , le système homogène ci-dessus est équivalent au système vectoriel suivant :

$$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

COROLLAIRE

Si $k > n$, alors toute famille $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ est liée.

EXAMPLES.



1.7.5 AGRANDIR UNE FAMILLE LIBRE

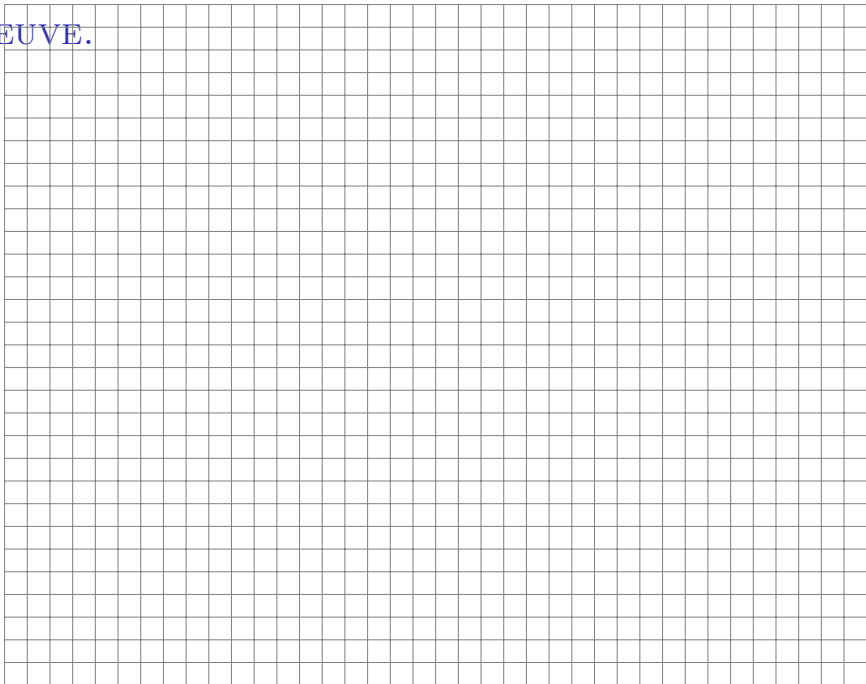
REMARQUE

Nous avons rencontré dans des exemples des familles génératrices d'un sous-espace W "trop grandes", on pouvait supprimer certains vecteurs sans perdre la propriété d'engendrer W . En contrepartie nous voyons maintenant qu'on peut ajouter des vecteurs à certaines familles libres sans perdre la liberté.

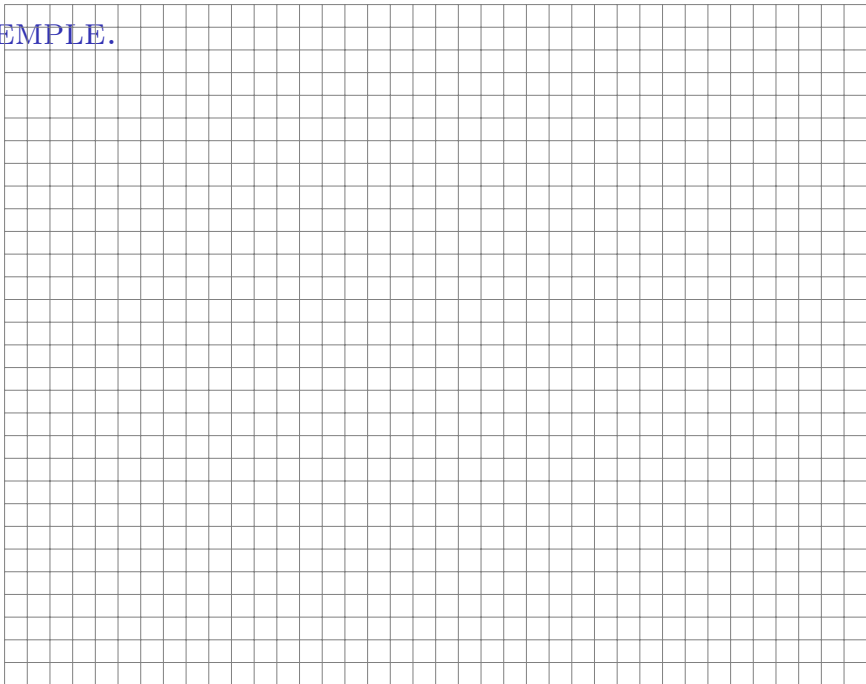
PROPOSITION

Soit $v_1, \dots, v_k$ une famille libre et v un vecteur d'un espace vectoriel V . Alors les vecteurs $v_1, \dots, v_k, v$ sont liés si et seulement si v appartient à $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$.

PREUVE.



EXAMPLE.



1.8 APPLICATIONS LINÉAIRES

Soient V et W des espaces vectoriels. On considère une transformation (application) $T : V \rightarrow W$. Elle associe à tout vecteur v de V un vecteur Tv de W .

DÉFINITION

L'application T est **linéaire** si, pour tous u, v de V et tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

❶ $T(u + v) = Tu + Tv$;

❷ $T(\alpha v) = \alpha(Tv)$.

Soit A une matrice $m \times n$. Alors la transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par la multiplication matricielle

$$\vec{v} \mapsto A\vec{v}$$

est linéaire.

1.8.1 EXEMPLES

- ❶ L'application $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui projette $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- ❷ L'homothétie de rapport 3 dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- ❸ La symétrie d'axe Ox dans $\mathbb{R}^2$ est linéaire puisqu'elle est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.8.2 PROPRIÉTÉS

PROPOSITION

Soit T une application linéaire. Alors

- ❶ $T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$;
- ❷ $T(0) = 0$.

Preuve. On calcule sans réfléchir !

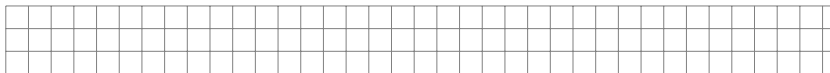
$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha u) + T(\beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$$

et d'autre part

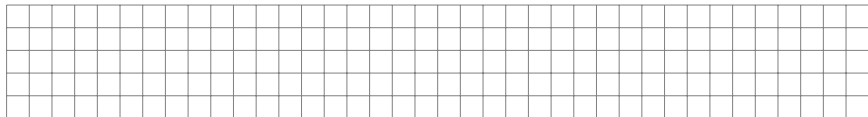
$$T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$$

1.8.3 AUTRES EXEMPLES

- ❶ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ est linéaire.
- ❷ $T : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $T(p) = p(t)$ est linéaire.



- ❸ $T_\lambda : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T_\lambda(p) = p(\lambda)$ est linéaire pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En particulier l'évaluation en zéro est linéaire :
- $$T_0(at^2 + bt + c) = c.$$



1.9 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

SLOGAN

Toutes les applications linéaires sont représentées par des matrices.

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. On choisit les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ils engendrent $\mathbb{R}^n$ puisque $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$. C'est la seule combinaison linéaire qui donne $\vec{x}$ car les $\vec{e}_i$ sont libres.

1.9.1 CONSTRUCTION DE LA MATRICE

SLOGAN

Si on connaît les vecteurs $T\vec{e}_i$, alors on connaît T .

On pose $\vec{a}_i = T\vec{e}_i$ et on forme la matrice $m \times n$

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$$

Pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ on peut écrire

$$\begin{aligned} T\vec{x} &= T(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 T\vec{e}_1 + \dots + x_n T\vec{e}_n \\ &= x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = A\vec{x} \end{aligned}$$

THÉORÈME

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Il existe alors une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que $T\vec{x} = A\vec{x}$.

1.9.2 EXEMPLES

SLOGAN

Les **colonnes** de la matrice de T sont les images des vecteurs $\vec{e}_i$.

Quelles sont toutes les applications linéaires $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Elles sont données par une matrice 1×1 , c'est-à-dire par un seul nombre réel a . Ici $\vec{e}_1 = (1)$ et ainsi

$$Tx = ax$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, la rotation d'axe Ox et d'angle 90° est linéaire. Quelle est sa matrice ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$