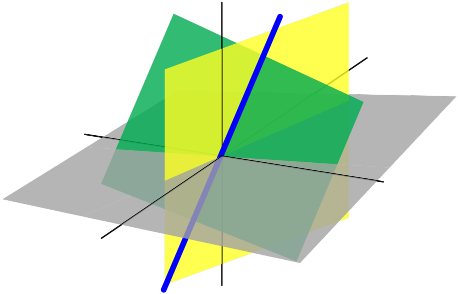
Algèbre Linéaire

Cours du 19 septembre

Jérôme Scherer



1.4.1 Produit matriciel, rappel

Soit A une matrice $m \times n$. Les colonnes de A sont des vecteurs

$$\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \overrightarrow{a_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Définition

La multiplication matricielle est définie par la formule

$$A \cdot \overrightarrow{x} = (\overrightarrow{a_1} \ldots \overrightarrow{a_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \overrightarrow{a_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{a_2} + \cdots + x_n \cdot \overrightarrow{a_n}$$

Ainsi le i-ème coefficient de $A \cdot \overrightarrow{x}$ vaut $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.

On multiplie "ligne par colonne".

1.4.2 Exemple

Nous voulons savoir pour quelles valeurs des paramètres b_1, b_2, b_3 le système suivant a une solution :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = b_1 \\ -x & -y & +z & = b_2 \\ x & +y & +3z & = b_3 \end{array}\right.$$

En d'autres termes nous voulons savoir quand le système suivant, écrit sous forme matricielle, est compatible (on a additionné la ligne 1 à la ligne 2 et soustrait cette même ligne à la troisième) :

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 2 & b_3 - b_1 \end{array}\right)$$

Résolution (suite et fin).

1.4.3 Linéarité du produit matriciel

Soient A une matrice $m \times n$, des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème

1. $A \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = A\overrightarrow{u} + A\overrightarrow{v}$;
2. $A \cdot (\alpha \overrightarrow{u}) = \alpha \cdot (A\overrightarrow{u})$.

Preuve. On compare simplement les coefficients de part et d'autre de l'égalité. Faisons-le pour l'action :

1.4.4 Théorème d'existence

Théorème

Les affirmations suivantes sont toutes équivalentes.

a. L'équation $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ a au moins une solution pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$.
b. Tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire des colonnes de A.
c. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
d. Dans chaque ligne de A il y a un pivot.

Dans le point (d) on parle bien des pivots de la matrice A, pas de la matrice augmentée $(A|b)$.

Preuve.

Exemples.

1.5 Ecriture des solutions

Nous introduisons maintenant une méthode pour écrire proprement et sous forme vectorielle les solutions d'un système d'équations linéaires.

1.5.1 Systèmes homogènes, I

Soit A une matrice $m \times n$, les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ forment un vecteur colonne $\overrightarrow{x}$. On considère le système

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Exemple

On veut résoudre le système $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

La matrice augmentée associée est $(1 \;\; -1 \;\; 1 \mid 0)$. Elle est échelonnée et réduite !

Il y a une inconnue principale : x_1 et deux inconnues libres : x_2, x_3. Ainsi x_2, x_3 joueront le rôle de paramètres dans la description des solutions.

$$x_1 = x_2 - x_3$$

1.5.1 Systèmes homogènes, II

Pour décrire les solutions de $x_1 = x_2 - x_3$, on constate que x_2 peut prendre n'importe quelle valeur réelle s et de même $x_3 = t$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour $s, t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit $S = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. C'est un plan car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

1.5.1 Systèmes homogènes, III

Théorème

Les solutions S d'un système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ forment toujours un sous-espace de la forme $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}\}$.

Remarques.

- Le nombre k est celui des inconnues secondaires.
- Si $k = 0$, alors $S = \mathrm{Vect}\{\emptyset\} = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $k = 1$ les solutions forment une droite, si $k = 2$, elles forment un plan, etc.

1.5.1 Exemple

On veut résoudre le système homogène

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -5x_2 & +8x_3 & =0 \\ -2x_1 & -7x_2 & +x_3 & =0 \\ 4x_1 & +2x_2 & +7x_3 & =0 \end{array}\right.$$

Pour ce faire on lui associe la matrice augmentée qu'on échelonne et réduit :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 8 & 0 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Suite.

1.5.2 Système inhomogènes, I

On travaille avec un système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ et le vecteur $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$.

Théorème

La solution générale S d'un système inhomogène compatible $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ s'écrit comme $\overrightarrow{p} + \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}\}$.

Remarques.

1. Le vecteur $\overrightarrow{p}$ est une solution particulière du système.
2. Le sous-espace $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}\}$ est la solution générale du système homogène associé $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

Supposons que nous avons trouvé une solution particulière $\overrightarrow{p}$.

Soit $\overrightarrow{q}$ une solution arbitraire du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Alors

$$\boxed{A\overrightarrow{p} = \overrightarrow{b} = A\overrightarrow{q}}$$

Ainsi

$$\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{q} - A\overrightarrow{p} = A(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p})$$

Mais alors $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$ est une solution du système homogène associé !

Par conséquent $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{p} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}\}$. Autrement dit

$$\boxed{\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p} + \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k}}$$

Réciproque : il est clair que $A(\overrightarrow{p} + \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{v_k}) = \overrightarrow{b}$. $\square$

1.5.2 Exemple

On veut résoudre le système inhomogène

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x_1 & -5x_2 & +8x_3 & = 2 \\ -2x_1 & -7x_2 & +x_3 & = -3 \\ 4x_1 & +2x_2 & +7x_3 & = 5 \end{array}\right.$$

Pour ce faire on lui associe la matrice augmentée qu'on échelonne et réduit :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 8 & 2 \\ -2 & -7 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 7 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 8 & 2 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Suite.

Remarques.

1.5.3 Systèmes (in)homogènes, conclusion

1. La solution générale d'un système homogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
2. La solution générale d'un système inhomogène $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est un translaté d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
3. Le choix de la solution particulière $\overrightarrow{p}$ n'est pas unique !
4. Le choix des vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_k}$ qui engendrent le sous-espace solution du système homogène n'est pas unique !
5. Une fois la matrice augmentée du système échelonnée et réduite, ces choix sont imposés ! Merci Gauss.

Exemples.

Suite.

Rappels

Définition

Soient $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de la forme

$$\boxed{\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{v_k}}$$

pour des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

L'ensemble de toutes ces combinaisons linéaires est appelé sous-espace engendré par $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}$ et on le note $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}\}$.

Le sous-espace engendré par un vecteur non nul est une droite passant par l'origine, deux vecteurs non colinéaires engendrent un plan, etc.

1.7.1 Indépendance linéaire

Définition

On dit que les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ d'un espace vectoriel V sont libres ou linéairement indépendants si la seule solution du système vectoriel

$$x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_k \cdot v_k = 0$$

est la solution triviale $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ n'est pas libre, on dit que les vecteurs sont liés ou linéairement dépendants.

Exemple. Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont libres.

1.7.2 Terminologie

Si les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont liés, il existe par définition des nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

et au moins l'un de ces α_i est non nul !

$$\alpha_i v_i = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{i-1} v_{i-1} - \alpha_{i+1} v_{i+1} - \cdots - \alpha_k v_k$$

$$\boxed{v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_i} v_k}$$

On dit que v_i dépend linéairement des autres vecteurs. Attention ! Ce n'est pas forcément vrai pour chaque v_i.

1.7.3 Cas particuliers

Le cas $k = 1$

Un vecteur v est linéairement indépendant si et seulement si il est non nul.

En effet si $v = 0$, alors le système $x \cdot v = 0$ admet une infinité de solutions. Par contre, si $v \neq 0$, alors la seule solution est $x = 0$.

Proposition

Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

Preuve. On a toujours $1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$. □

Le cas $k = 2$

Deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires.