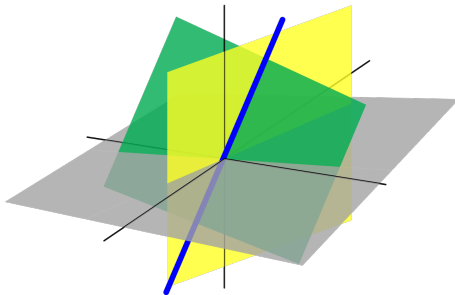


# ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 17 SEPTEMBRE

Jérôme Scherer



## 4.1.1 RAPPELS SUR LES ESPACES VECTORIELS

Un **espace vectoriel** est un ensemble  $V$  non vide dont les éléments sont appelés **vecteurs**. Il est muni de deux opérations.

- 1 L'**addition** (ou somme)  $+: V \times V \rightarrow V$  qui associe à deux vecteurs  $(u, v)$  leur somme  $u + v$ .
- 2 L'**action**  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$  qui associe à un nombre  $\alpha$  et un vecteur  $u$  leur produit  $\alpha u$ .

Ces opérations vérifient huit règles qui expliquent en gros qu'on peut calculer comme on a l'habitude de le faire dans  $\mathbb{R}^n$ .

## 4.1.2 PROPRIÉTÉS

On note ici  $0_{\mathbb{R}}$  pour le nombre 0 et  $0_V$  pour le vecteur nul. Bientôt le contexte permettant de distinguer nombres et vecteurs, on oubliera ces indices.

### 0 EST ABSORBANT

On a  $0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_V$  pour tout  $u \in V$ .

**Preuve.** On écrit

$$0_{\mathbb{R}} \cdot u = (0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}) \cdot u = 0_{\mathbb{R}} \cdot u + 0_{\mathbb{R}} \cdot u$$

par distributivité. On ajoute de part et d'autre l'opposé de  $0_{\mathbb{R}} \cdot u$  si bien que

$$0_V = 0_{\mathbb{R}} \cdot u$$

après avoir utilisé l'associativité de l'addition.



## REMARQUE

### L'OPPOSÉ

On a  $(-1) \cdot u = -u$  pour tout  $u \in V$ .

Il suffit de vérifier que  $u + (-1) \cdot u = 0_V \dots$

### D'AUTRES CORPS DE NOMBRES

On peut définir la notion d'espace vectoriel sur d'autres **corps**.

- 1 sur les nombres rationnels  $\mathbb{Q}$  ou sur les nombres complexes  $\mathbb{C}$  ;
- 2 sur le corps à deux éléments  $\mathbb{F}_2 = \{0; 1\}$  avec la règle d'addition "binaire"  $1 + 1 = 0$ .

On ne peut pas le faire sur les entiers relatifs  $\mathbb{Z}$  ! En général on ne peut pas réduire les matrices à coefficients entiers sans passer soudainement dans  $\mathbb{Q}$ .

## 1.3.4 ET 4.1.4 COMBINAISONS LINÉAIRES

### DÉFINITION

Soient  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Un vecteur

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p$$

est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{v}_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

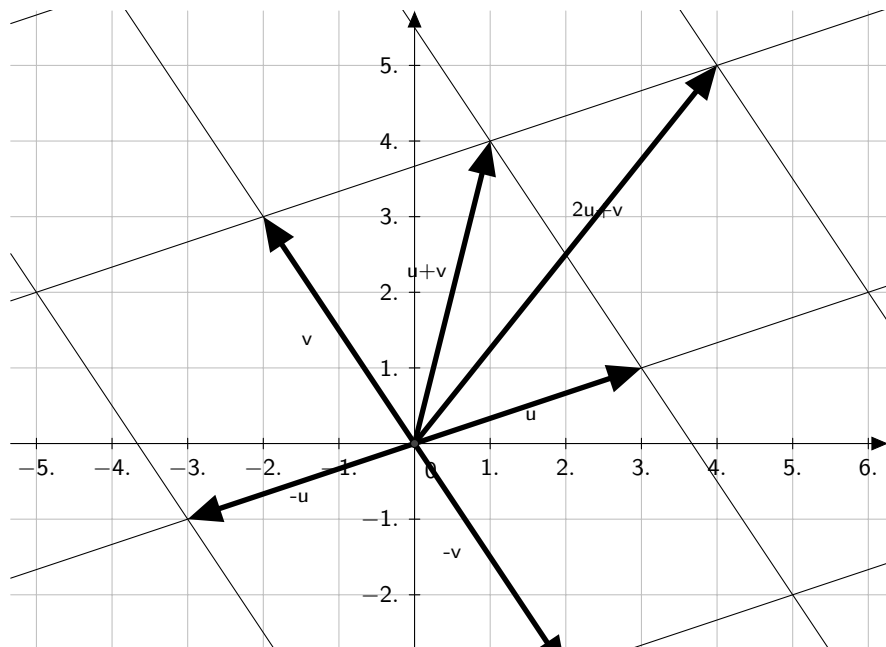
### DÉFINITION

Soient  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs d'un espace vectoriel  $V$ . Un vecteur

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

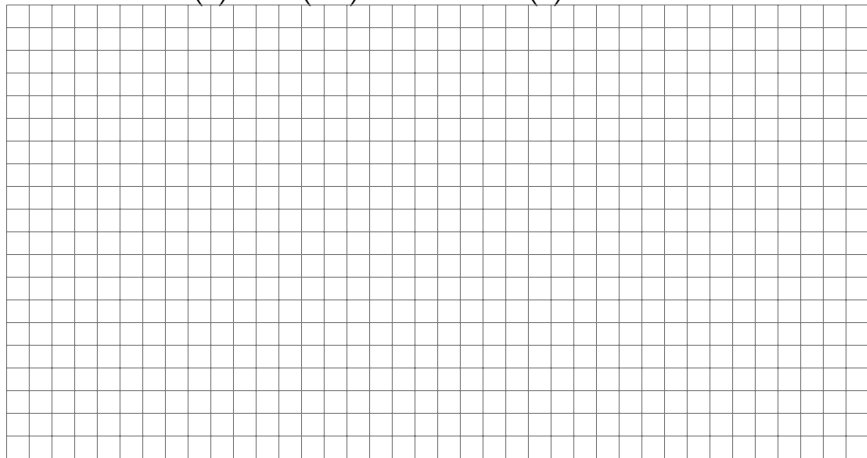
est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs  $v_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

## 1.3.4 EXAMPLES

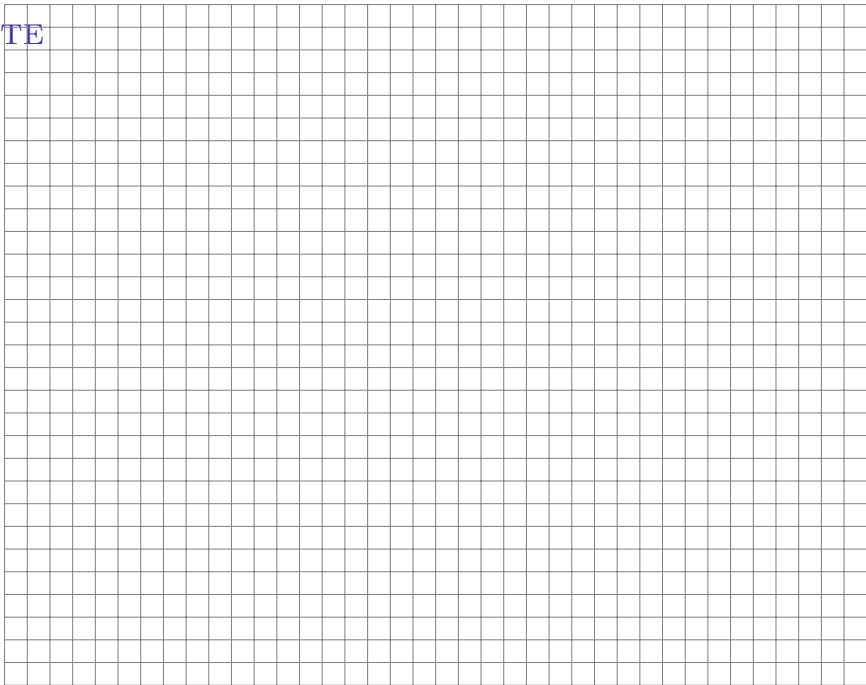


## EXISTE-T-IL UNE COMBINAISON LINÉAIRE

...des vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  qui donne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ?



SUITE



### 1.3.5 RÉSOLUTION DE SYSTÈME

- On se donne des vecteurs  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  et  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^n$ .
- On construit la matrice augmentée  $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \mid \vec{b})$ .

#### REMARQUE

L'équation vectorielle  $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$  a les mêmes solutions que le système correspondant à la matrice  $A$ .

#### POINT DE VUE VECTORIEL

Le vecteur  $\vec{b}$  est combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  si et seulement si le système représenté par la matrice  $A$  est compatible.

## 4.1.5 FAIRE DU NEUF AVEC DU VIEUX

### DÉFINITION

Un **sous-espace**  $W$  de  $V$  est un sous-ensemble de  $V$  contenant le vecteur nul tel que

- Ⓐ Stabilité de la somme : si  $u, v \in W$ , alors  $u + v \in W$  ;
- Ⓑ Stabilité de l'action : si  $u \in W$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda u \in W$ .

Si  $W$  est un sous-espace de  $V$ , la somme dans  $W$  reste associative, commutative, etc., l'action reste distributive par rapport à l'addition, etc., puisque les calculs dans  $W$  sont identiques dans  $V$ .

### PROPOSITION

Un sous-espace vectoriel est toujours un espace vectoriel.

## 4.1.5 SOUS-ESPACES VECTORIELS

**Le plus petit sous-espace de  $V$ .** C'est le sous-espace nul  $\{0_V\}$ .

**Le plus grand sous-espace de  $V$ .** C'est l'espace  $V$  lui-même.

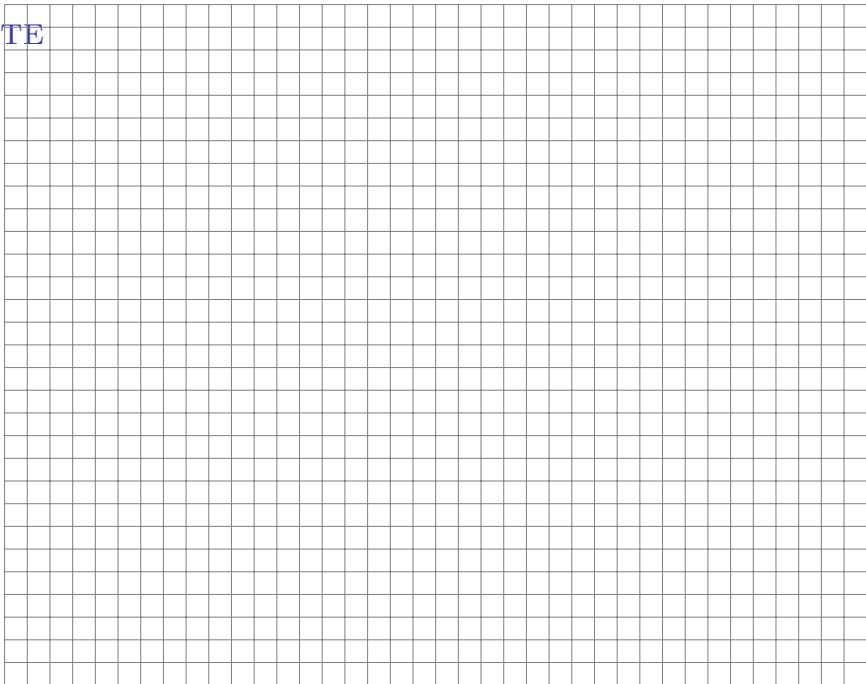
### EXEMPLES

- 1 Dans  $\mathbb{R}^3$  une droite passant par l'origine est de la forme  $W = \{\lambda \vec{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  pour un vecteur  $\vec{w}$  non nul de  $\mathbb{R}^3$ . C'est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2 Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  le sous-ensemble des fonctions continues  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  forme un sous-espace.

# PREUVES



SUITE



## 4.1.6 SOUS-ESPACES ET COMBINAISONS LINÉAIRES

### DÉFINITION

Soient  $v_1, \dots, v_k$  des vecteurs de  $V$ . Alors  $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ , pour  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ .

### THÉORÈME

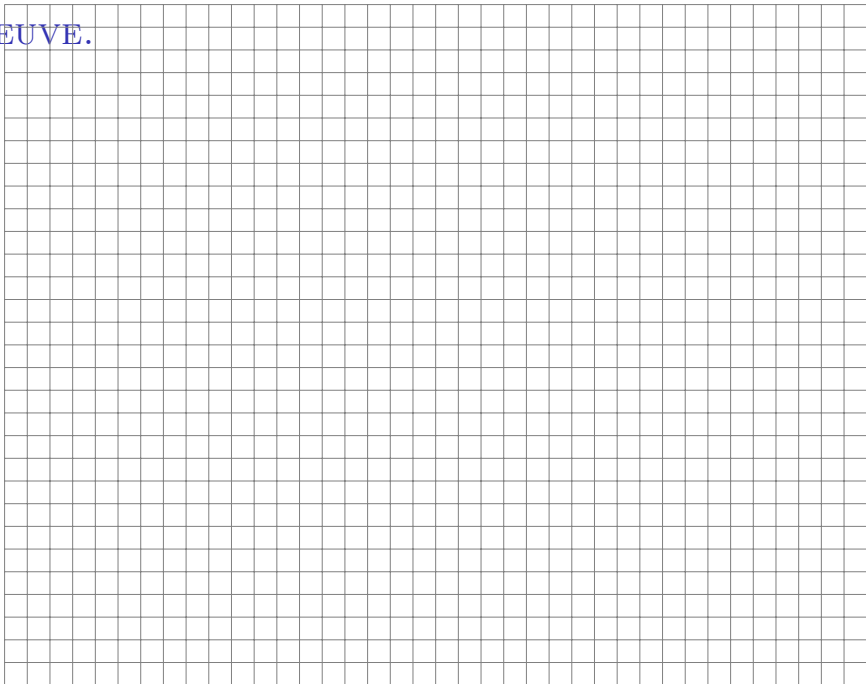
$\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$  est un sous-espace de  $V$ .

**Remarque.** Le vecteur nul  $0$  appartient à  $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ . Il suffit en effet de choisir tous les coefficients  $\lambda_i = 0$ .

$$0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k = 0$$

**Convention.**  $\text{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$ .

PREUVE.



## 4.1.6 ET 1.3.6 TERMINOLOGIE

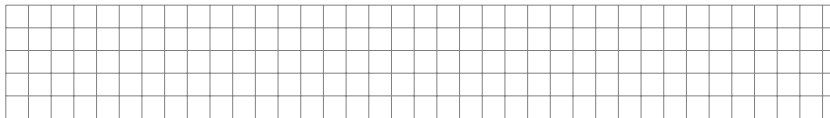
Soit  $V$  un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_k$  des vecteurs de  $V$ . Soit  $W = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$ . Alors

- $W$  est **engendré** par les vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  ;
- les vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  sont des **générateurs** de  $W$  ;
- l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est une **partie génératrice** de  $W$ .

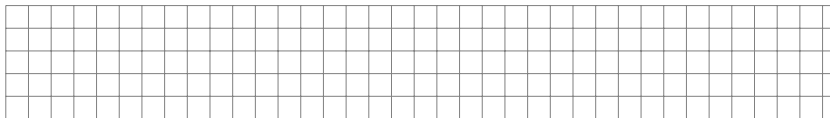
On préfère en général trouver des petites parties génératrices d'un sous-espace donné. Cette question nous occupera par la suite !

## 4.1.7 ET 1.3.7 EXEMPLES

- ❶  $\text{Vect}\{t^2, t\}$  est un sous-espace de  $\mathbb{P}_2$ .



- ❷  $\text{Vect}\{\sin x, \cos x\}$  est un sous-espace de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .



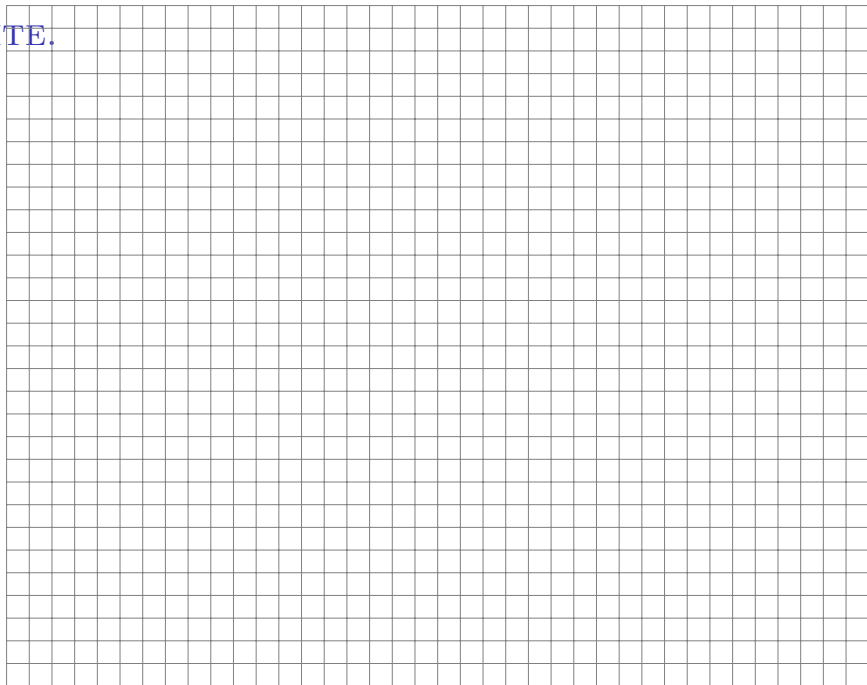
- ❸ Dans  $\mathbb{R}^4$  étudions l'ensemble  $W$  des vecteurs
- $$\begin{pmatrix} a - 2b + c \\ -a - c \\ b + 2a + 2c \\ -b \end{pmatrix}$$

où  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

MEILLEURE DESCRIPTION.



SUITE.



## 1.4.1 PRODUIT MATRICIEL

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ . Les colonnes de  $A$  sont des vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

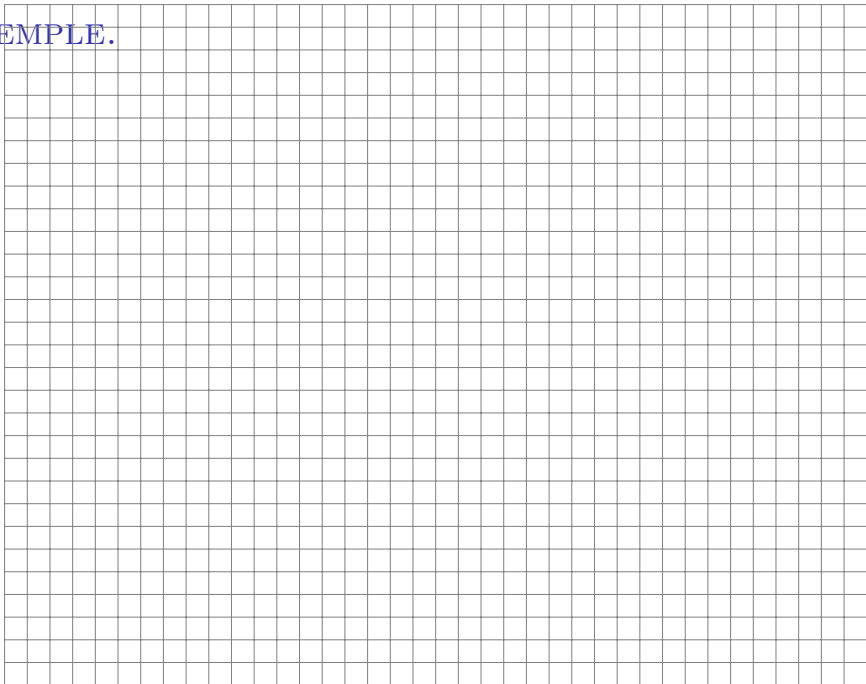
### DÉFINITION

La multiplication matricielle est définie par la formule

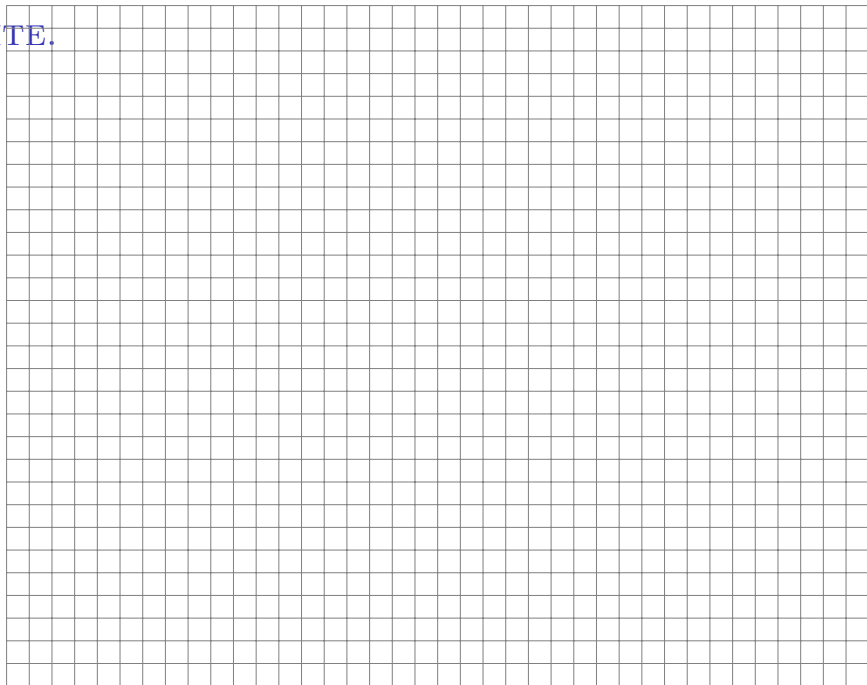
$$A \cdot \vec{x} = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{a}_n$$

Ainsi le  $i$ -ème coefficient de  $A \cdot \vec{x}$  vaut  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ .

EXAMPLE.



SUITE.



## 1.4.2 PROBLÈMES ÉQUIVALENTS

### THÉORÈME

Les problèmes suivants sont tous équivalents. Résoudre :

- ❶ l'équation matricielle  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- ❷ l'équation vectorielle  $x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$
- ❸ le système correspondant à  $(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n | \vec{b})$

### PROPOSITION

L'équation matricielle  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$  admet une solution si et seulement si  $\vec{b}$  est combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

### COROLLAIRE

L'équation matricielle  $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$  admet toujours une solution.

## 1.4.2 EXEMPLE

Nous voulons savoir pour quelles valeurs des paramètres  $b_1, b_2, b_3$  le système suivant a une solution :

$$\begin{cases} x + y + z = b_1 \\ -x - y + z = b_2 \\ x + y + 3z = b_3 \end{cases}$$

En d'autres termes nous voulons savoir quand le système suivant est compatible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

RÉSOLUTION.

