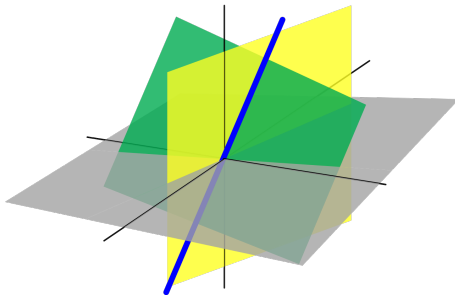


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 28 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



5.6.1 APPLICATION : CALCUL DE PUISSANCES

Soit A une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}$$

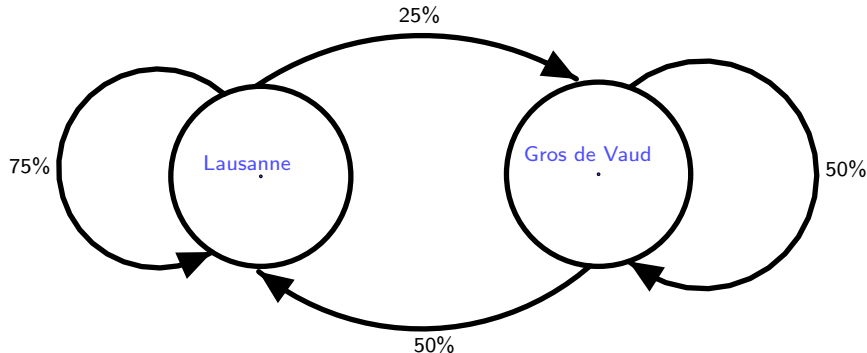
Mais alors on a aussi

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \quad \text{et} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

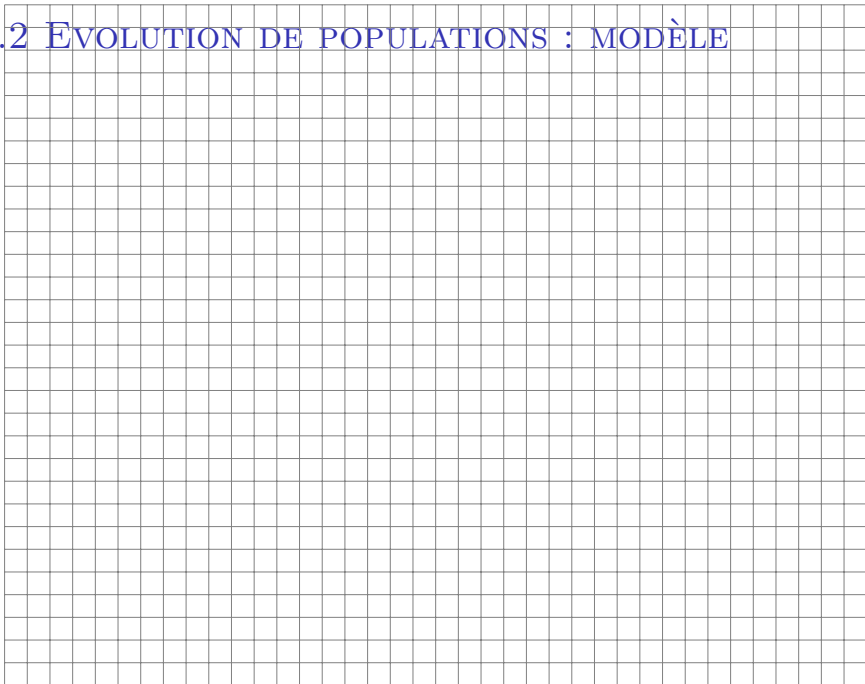
5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS

On étudie les populations de Lausanne et du Gros de Vaud. La situation (sans lien avec la réalité du canton) est représentée par la situation suivante :



Appelons u_k la population urbaine l'année k (en pourcents) et r_k la population rurale.

5.6.2 ÉVOLUTION DE POPULATIONS : MODÈLE



5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS II

Nous avons modélisé matriciellement cette situation et posons

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi}$$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} u_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

Pour comprendre ce qui se passe dans le futur (lointain), il faut donc calculer $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$.

5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS III

Nous calculons

❶ $c_A(t) = (t - 1)(t - 1/4)$

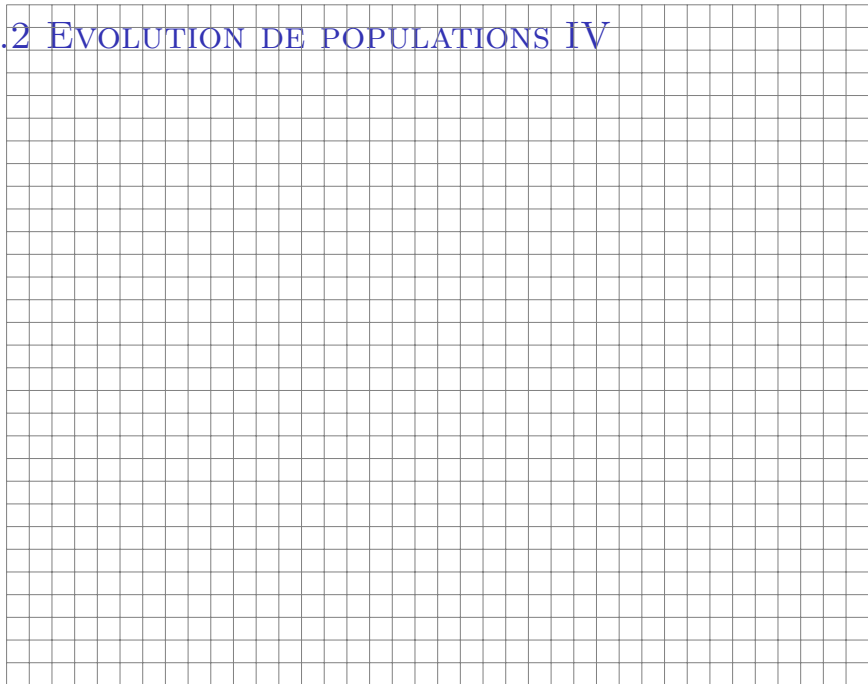
❷ $E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $E_{1/4} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

❸ $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A

❹ $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}_{an}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = (Id)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

❺ **Formule de changement de base** : $A^k = PD^kP^{-1}$.

5.6.2 EVOLUTION DE POPULATIONS IV



CHAPITRE 6 : ORTHOGONALITÉ

- ❶ $\mathbb{R}^n$ est non seulement un espace vectoriel, c'est un espace euclidien.
- ❷ Nous avons une notion de distance et d'angle.
- ❸ La base canonique est composée de vecteurs orthogonaux deux à deux et unitaires (de longueur 1).

6.1.1 LE PRODUIT SCALAIRE

DÉFINITION

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire** est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

PROPRIÉTÉS

- ❶ **Commutativité.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- ❷ **Distributivité.** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- ❸ **Compatibilité action.** $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v}$
- ❹ $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

Preuve. Les propriétés 1-3 sont celles de la multiplication de matrices. Pour 4, $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq 0$. On a l'égalité si et seulement si tous les $u_i = 0$. □

6.1.2 LA NORME

DÉFINITION

La **longueur** ou **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

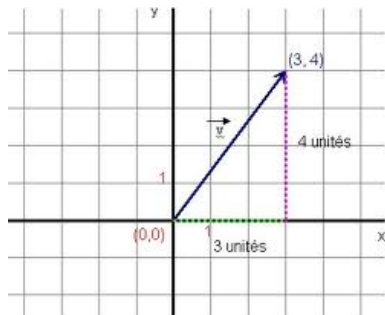
Un vecteur de norme 1 est dit **unitaire**. Pour normaliser un vecteur non nul, i.e. pour le rendre unitaire, il suffit de le diviser par sa norme :

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \begin{pmatrix} u_1 / \|\vec{u}\| \\ \vdots \\ u_n / \|\vec{u}\| \end{pmatrix} \text{ est unitaire}$$

6.1.3 THÉORÈME DE PYTHAGORE CLASSIQUE

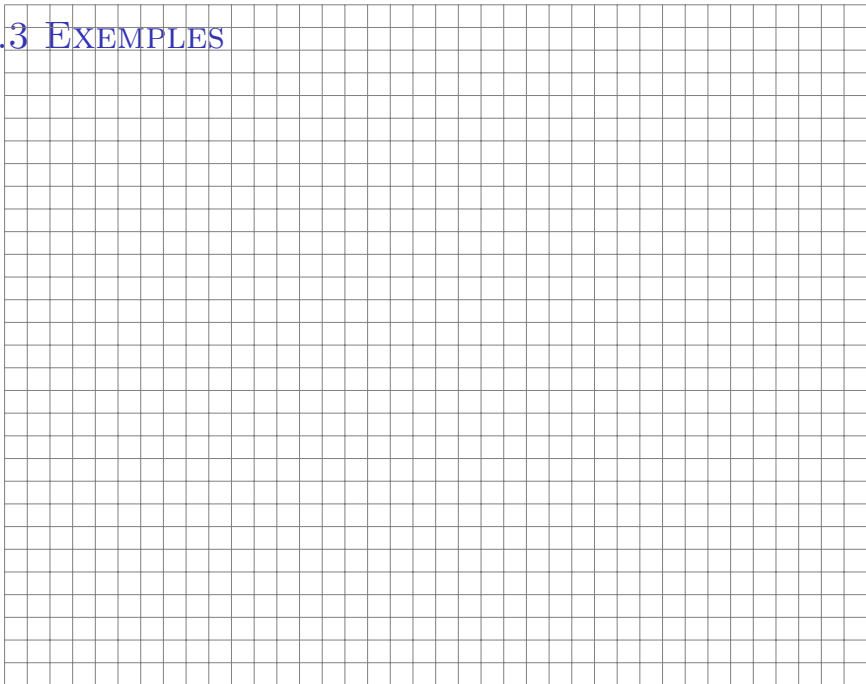
Dans $\mathbb{R}^2$ la norme d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vaut

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



La norme du vecteur $\vec{u}$ est la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle dont les cathètes sont de longueur a et b .

6.1.3 EXAMPLES



6.1.4 LA DISTANCE

DÉFINITION

La **distance** entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|.$$

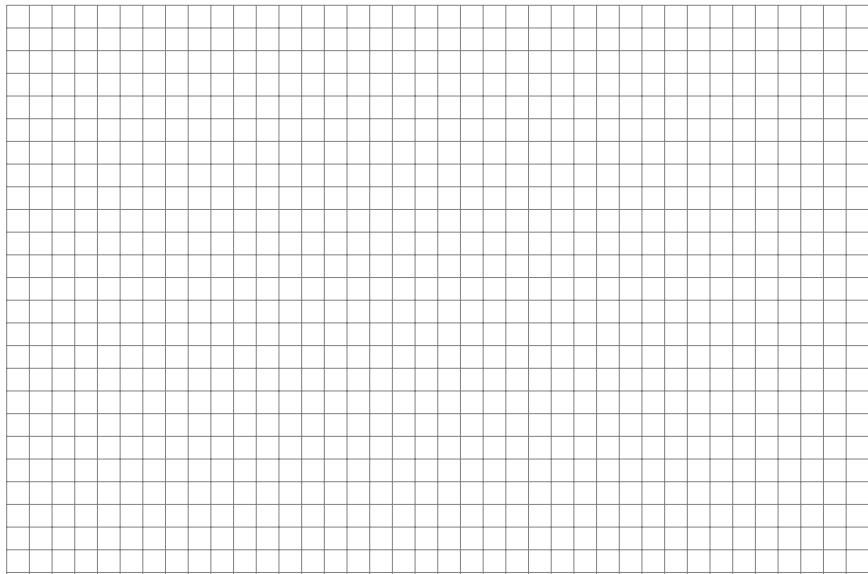
Exemple. La distance entre $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ est

$$d(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux. Comment voit-on cela ? Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la même que la distance entre $\vec{u}$ et $-\vec{v}$.

6.1.4 REMARQUE

Quelles sont les conséquences de l'égalité $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{u}, -\vec{v})$?



6.1.5 ORTHOGONALITÉ

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$

THÉORÈME DE PYTHAGORE

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

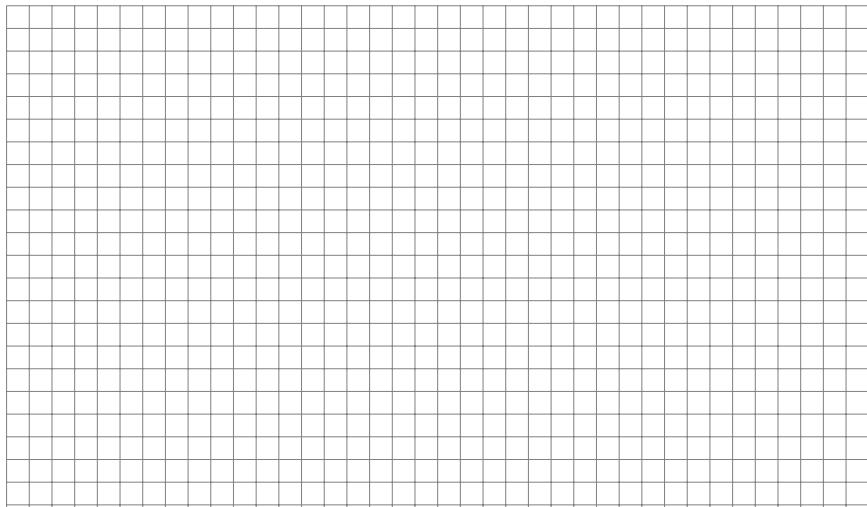
Notation. Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. On note $W^\perp$ l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à W . Ainsi

$$\boxed{W^\perp = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ pour tout } \vec{w} \in W\}}.$$

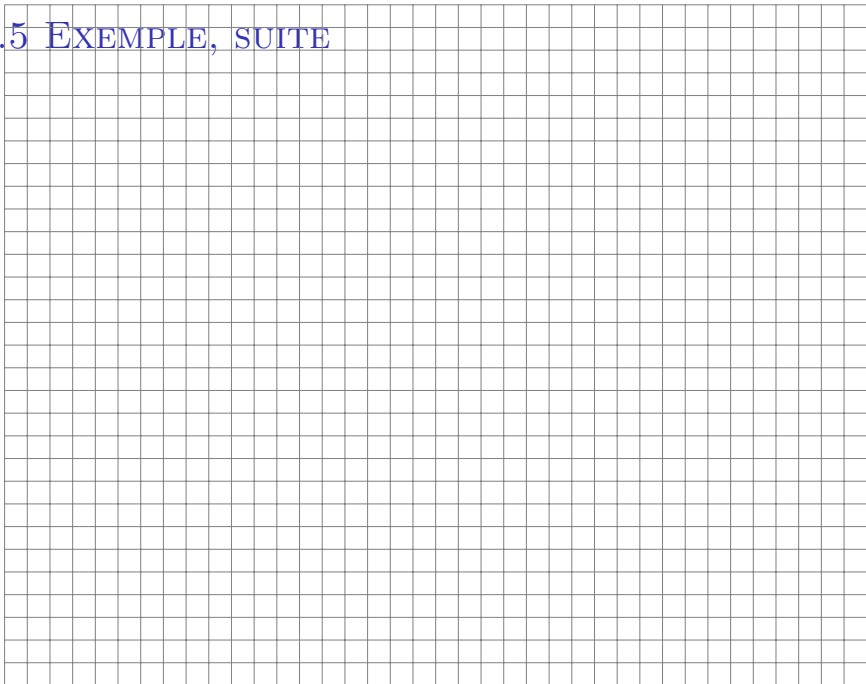
C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ (série 11).

6.1.5 EXEMPLE

Soit W le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation
 $2x - y + 3z = 0$. On veut décrire ce plan et $W^\perp$.



6.1.5 EXEMPLE, SUITE



6.1.5 EXEMPLES

PROPOSITION

La droite perpendiculaire au plan d'équation $ax + by + cz = 0$, et passant par l'origine, dans $\mathbb{R}^3$, est engendrée par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

THÉORÈME

- ❶ $\text{Ker}A = (\text{Lign}A)^\perp$;
- ❷ $(\text{Im}A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

Preuve.

- ❶ $A \cdot \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} \perp \text{chaque ligne de } A$.
- ❷ $\text{Im}A = \text{Col}A = \text{Lign}(A^T)$ et $[\text{Lign}(A^T)]^\perp = \text{Ker}(A^T)$.

6.1.6 CALCUL D'ANGLES

Le produit scalaire permet aussi de calculer l'angle entre deux vecteurs.

LOI DU COSINUS

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \alpha.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est

- ❶ nul quand $\cos \alpha = 0$, i.e. les vecteurs sont perpendiculaires ;
- ❷ maximal quand $\cos \alpha = 1$, i.e. les vecteurs sont colinéaires et de même sens ;
- ❸ minimal quand $\cos \alpha = -1$, i.e. les vecteurs sont colinéaires et de sens opposé.

6.2.1 FAMILLES ORTHOGONALES

DÉFINITION

Une famille $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tous $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Exemple. La base canonique $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est orthonormée. En général on appelle **base orthogonale** de W une famille orthogonale ordonnée qui forme une base de W . De même pour une **base orthonormée**.

THÉORÈME

Une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.

6.2.1 PREUVE



6.2.1 FAMILLES ORTHOGONALES

DÉFINITION

Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$ pour tous $i \neq j$. Cette famille est **orthonormée** si de plus $\|\vec{u}_i\| = 1$ pour tout i .

Rappel.

- 1 Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul :
$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$
- 2 Par distributivité du produit scalaire, $\vec{u} \perp \vec{a}$ et $\vec{u} \perp \vec{b}$ implique que $\vec{u} \perp \text{Vect}\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

THÉORÈME

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

6.2.2 COORDONNÉES DANS UNE BASE ORTHOGONALE

Soit W un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une base orthogonale de W .

THÉORÈME

Pour tout vecteur $\vec{w} \in W$, on a $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$ et

$$\alpha_j = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_j}{\|\vec{u}_j\|^2}$$

Preuve. On sait que $\vec{w}$ s'écrit comme combinaison linéaire $\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k$. Alors

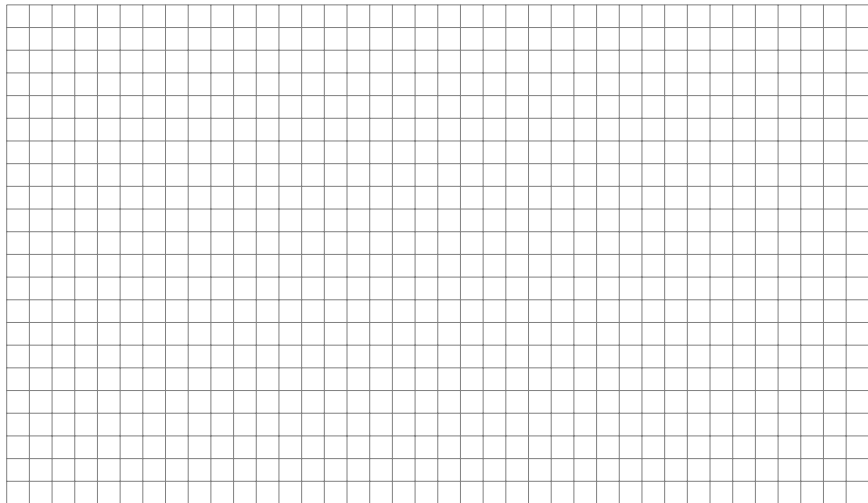
$$\vec{w} \cdot \vec{u}_j = (\alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) \cdot \vec{u}_j = \alpha_j \vec{u}_j \cdot \vec{u}_j = \alpha_j \|\vec{u}_j\|^2$$

car $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$ si $i \neq j$.

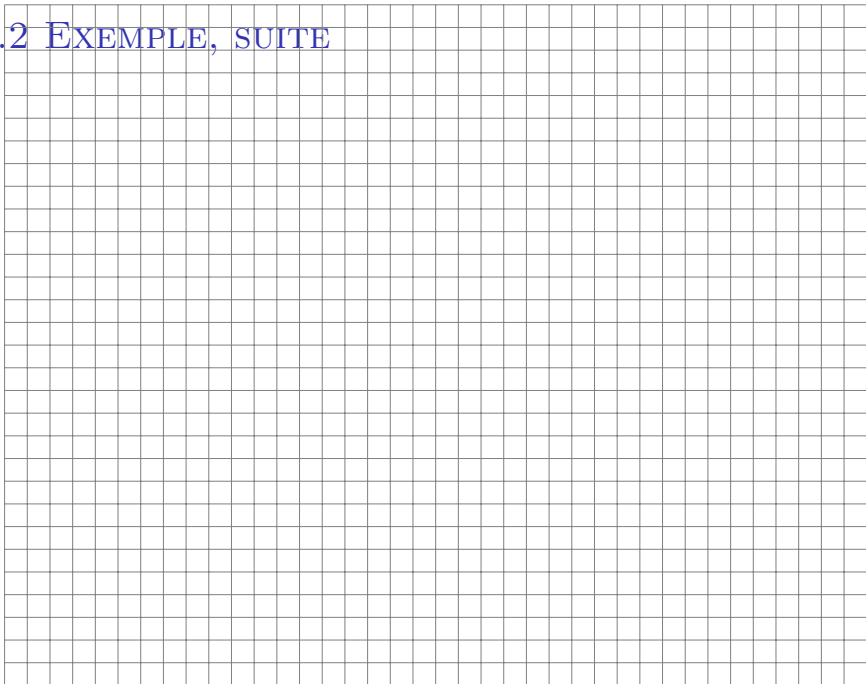


6.2.2 EXEMPLE

On construit une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ en commençant avec le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$.



6.2.2 EXEMPLE, SUITE



6.2.3 MATRICES ORTHOGONALES

THÉORÈME

Les colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthonormées si et seulement si $U^T U = I_n$.

Preuve. Si $U = (\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n)$, alors le coefficient (i, j) de la matrice $U^T U$ est exactement $\vec{u}_i^T \vec{u}_j = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$. □

DÉFINITION

Une matrice **carrée** U est **orthogonale** si $U^T U = I_n$. Autrement dit $U^{-1} = U^T \iff$ colonnes (et lignes !) de U sont orthonormées.

Une matrice orthogonale représente une transformation linéaire qui préserve les distances et l'orthogonalité (c'est donc une **isométrie** de $\mathbb{R}^n$, par exemple une rotation ou une symétrie).

6.2.4 PRÉSERVATION DES LONGUEURS

THÉORÈME

Soit U une matrice orthogonale. Alors

- ❶ $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- ❷ $U\vec{x} \cdot U\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$.
- ❸ $U\vec{x} \perp U\vec{y} \iff \vec{x} \perp \vec{y}$.

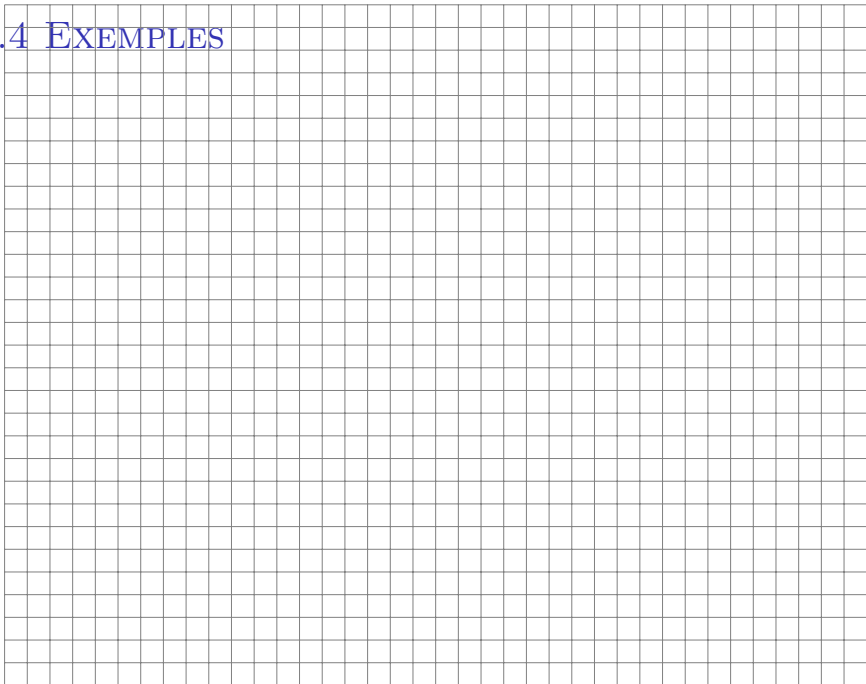
Preuve. (2) On calcule $U\vec{x} \cdot U\vec{y}$ avec la définition :

$$(U\vec{x})^T U\vec{y} = \vec{x}^T U^T U\vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

(1) Lorsque $\vec{x} = \vec{y}$ on trouve $\|U\vec{x}\|^2 = \|\vec{x}\|^2$ d'où le point 1.

(3) On voit que le produit scalaire $U\vec{x} \cdot U\vec{y}$ est nul si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. □

6.2.4 EXAMPLES

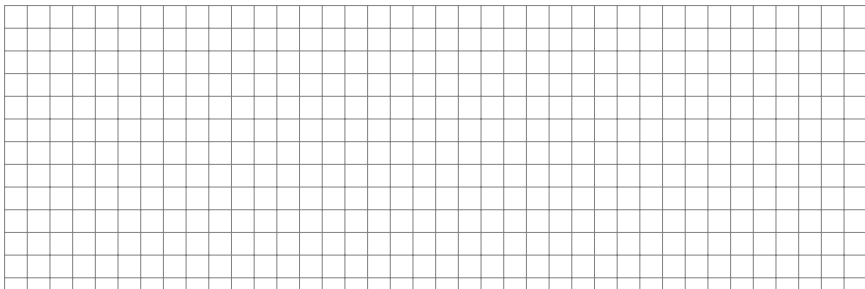


6.2.4 CAVEAT

ATTENTION !

Si U est orthogonale, alors aussi $UU^T = I_n$. Mais

- ❶ si A est carrée avec $A^T A$ diagonale, AA^T n'est pas diagonale en général ;
- ❷ si A n'est pas carrée avec $AA^T = I_n$, alors $A^T A \neq I_m$ en général.



6.2.5 EXEMPLES

- ❶ Les matrices de réflexion sont orthogonales.
- ❷ Les matrices de rotation sont orthogonales.

❸ $U = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 36 & 48 & -80 \\ -80 & 60 & 0 \\ 48 & 64 & 60 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

C'est en fait la matrice d'une rotation d'axe $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d'angle $73,8^\circ$, pour le voir il faut diagonaliser U , sur $\mathbb{C}$!