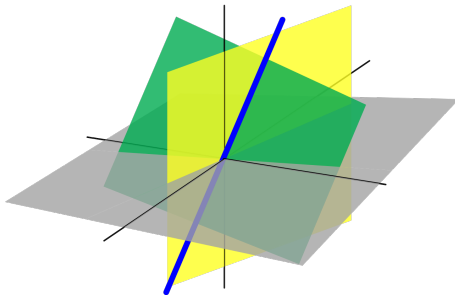


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 21 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



5.3.1 DIAGONALISATION

DÉFINITION

Une matrice est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, i. e. il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

THÉORÈME

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Preuve. On regarde A comme la matrice de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans la base canonique : $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$ et $(T)_{can}^{can} = A$.

Soit $\mathcal{B}$ une autre base. Alors $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale $\iff$

$$T(\vec{b}_i) = \lambda_i \vec{b}_i$$

$\iff (T(\vec{b}_i))_{\mathcal{B}} = \lambda_i \vec{e}_i$. Dans la base $\mathcal{B}$ les coordonnées de $T(\vec{b}_i)$ sont nulles sauf la i -ème.

5.3.2 OBSERVATIONS

Soit A la matrice d'une application linéaire T exprimée dans la base canonique, $A = (T)_{\mathcal{C}^{an}}^{can}$. Soit D la matrice de T exprimée dans une base $\mathcal{B}$, de sorte que $D = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale.

- ❶ Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{can}$ sont les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$.
- ❷ $A = PDP^{-1}$ et D est diagonale, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A se trouvent dans la diagonale, dans l'ordre choisi pour construire la base.
- ❸ Le déterminant de A est le produit des valeurs propres (avec multiplicité). En effet

$$\begin{aligned}\det A &= \det(PDP^{-1}) = \det P \det D \det(P^{-1}) \\ &= \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$

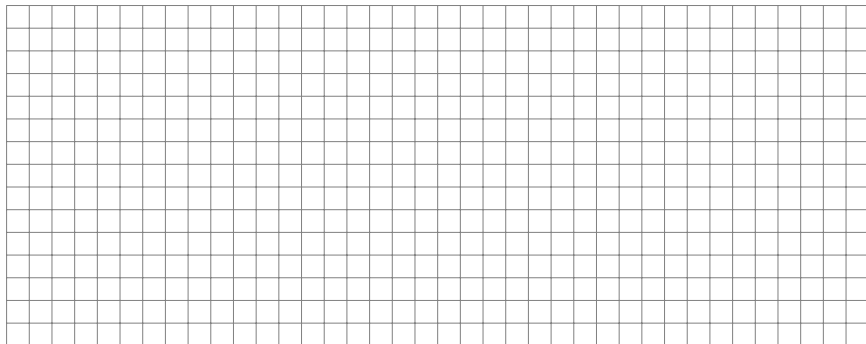
5.3.2 EXEMPLE

Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c - b & a + d \end{pmatrix}$$

On commence par écrire la matrice de T dans la base canonique.

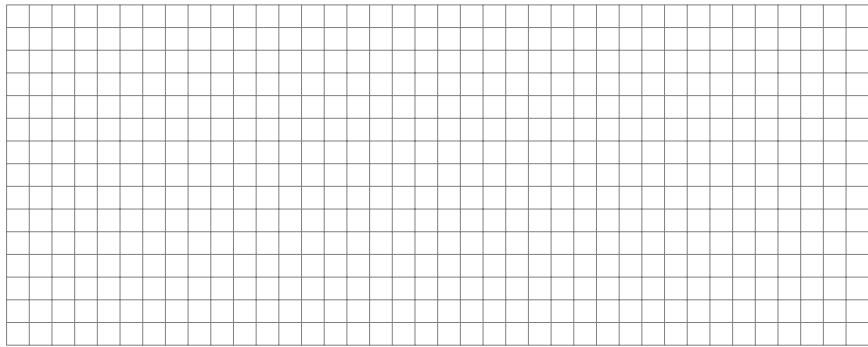
Cette matrice est de taille 4×4 !



5.3.2 EXEMPLE, SUITE

On calcule le polynôme caractéristique

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -t & -t & 0 \\ 2-t & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix}$$



5.3.2 EXAMPLE, FIN



5.3.3 PREMIER CRITÈRE DE DIAGONALISATION

THÉORÈME

Soit A une matrice de taille $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes. Alors A est diagonalisable.

Preuve. Pour chaque valeur propre on a un vecteur propre. Ces n vecteurs sont libres par 5.1.5 et forment alors une base de $\mathbb{R}^n$. $\square$

PROPOSITION

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de A . Alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}\}$.

Preuve. Soit $\vec{x} \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, et aussi $A\vec{x} = \mu\vec{x}$. Comme $\mu \neq \lambda$, alors $\vec{x} = \vec{0}$. $\square$

REMARQUE

Les espaces propres E_λ et E_μ forment une somme directe $E_\lambda \oplus E_\mu$.

5.3.4 MULTIPLICITÉS

PROPOSITION

Soit λ une valeur propre de A . Alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \text{mult}(\lambda)$.

Preuve. E_λ contient un vecteur propre, **non nul** : $1 \leq \dim E_\lambda$. Si $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ est une base de E_λ , on peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base la matrice devient

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est le même que celui de A et commence par $(\lambda - t)^k$. Donc $k \leq \text{mult}(\lambda)$. $\square$

5.3.5 CRITÈRE DE DIAGONALISATION

Les deux propositions ci-dessus sont les clés de notre deuxième critère. Il faut qu'il y ait assez de valeurs propres réelles **et** assez de vecteurs propres.

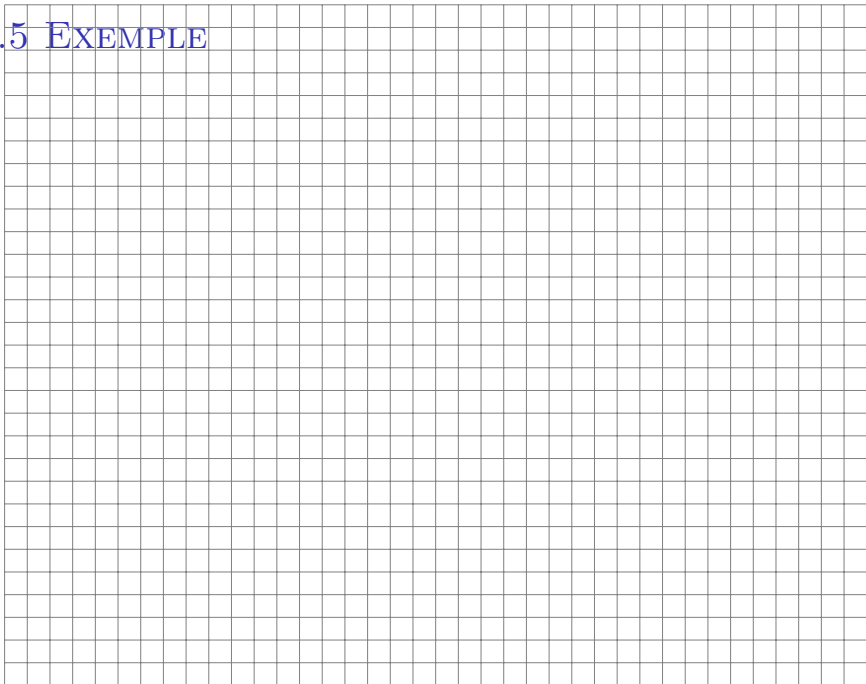
THÉORÈME

Une matrice A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si

- 1 Le polynôme caractéristique est **scindé** : il se décompose en produit de facteurs $(\lambda - t)$ avec des $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 2 Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$.

Si A est diagonalisable on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propre.

5.3.5 EXAMPLE



A.1 LES CORPS : DÉFINITION

Jusqu'ici nous avons développé des méthodes qui permettent de travailler avec des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ et nous avons aussi constaté que cela fonctionne dans $\mathbb{Q}$. Il y a beaucoup d'autres *corps de nombres*! Vous connaissez bien sûr les nombres complexes, $\mathbb{C}$, et on pourrait refaire la théorie de la diagonalisation sur les complexes, nous en verrons d'autres.

DÉFINITION

Un **corps** K est un ensemble muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ pour lesquelles les règles de calcul "usuelles" s'appliquent.

A.1 LES CORPS : DÉFINITION

Plus précisément on demande que

- ❶ $(K, +)$ est un **groupe abélien** : il vérifie les axiomes d'associativité, de commutativité, il y a un élément neutre 0 et chaque nombre x admet un opposé $-x$.
- ❷ Le produit est associatif, commutatif, il existe un élément neutre 1 et chaque nombre $x \neq 0$ admet un inverse x^{-1} .
- ❸ La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $x(y + z) = xy + xz$ pour tous $x, y, z \in K$.

A.2 EXEMPLE : LE CORPS $\mathbb{F}_2$

Soit $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. On définit somme et produit par les tables :

+	0	1
---	---	---

0	0	1
---	---	---

1	1	0
---	---	---

·	0	1
---	---	---

0	0	0
---	---	---

0	0	1
---	---	---

REMARQUE

La symétrie des tableaux montre la commutativité des opérations. Pour $+$ la ligne de 0 montre que c'est un élément neutre et pour $\cdot$ c'est celle de 1 qui le prouve.

A.3. APPLICATION : LE CODE DE HAMMING

En 1946 l'ingénieur Hamming invente le premier code autocorrecteur pour ordinateurs à cartes perforées.



Son idée est d'ajouter à chaque mot de 4 bits $d_1 d_2 d_3 d_4$ dans $(\mathbb{F}_2)^4$ un mot de 3 bits de contrôle formé par les sommes dans $\mathbb{F}_2$:

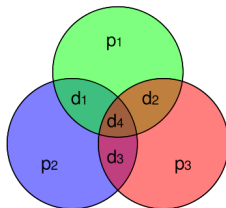
❶ $d_1 + d_2 + d_4$

❷ $d_1 + d_3 + d_4$

❸ $d_2 + d_3 + d_4$

A.3. LE CODE DE HAMMING

On utilise 16 signes comme alphabet de base : 0000, 0001, ..., 1110, 1111. On visualise les bits de contrôle p_1 , p_2 et p_3 comme suit :



Si une erreur se glisse dans la transmission, le code est capable de s'autocorriger. Si le mot $d_1 d_2 d_3 d_4 p_1 p_2 p_3 = 1001010$ est transmis, la parité de $d_1 + d_2 + d_4$ est correcte, mais les deux autres sont erronés. Ainsi il faut corriger le seul nombre commun aux bits de contrôle p_2 et p_3 qui n'apparaît pas dans p_1 .

A.4 LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

On utilise la notation cartésienne pour introduire $\mathbb{C}$.

DÉFINITION

Le corps des **nombres complexes** $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est muni

- ❶ de la somme $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$;
- ❷ du produit $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

REMARQUE

L'addition est définie coefficient par coefficient, pas de surprise ! La multiplication est définie de la seule manière possible pour que

- ❶ elle étende le produit de $\mathbb{R}$;
- ❷ on ait $i^2 = -1$;
- ❸ le produit soit distributif par rapport à la somme.

A.5 LES MATRICES DE TAILLE 2×2

- ❶ On peut additionner deux matrices de même taille et $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +)$ forme un groupe commutatif.
- ❷ On peut aussi multiplier deux matrices 2×2 entre elles, ce produit est distributif par rapport à la somme, mais les matrices ne forment pas un corps !

PROBLÈMES

Le produit n'est pas commutatif, mais pire, il existe de nombreuses matrices qui ne sont pas inversibles. L'ensemble des matrices de taille 2×2 forme ce que l'on appelle un **anneau** (non commutatif).

Par contre, il existe des sous-ensembles de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ qui sont des corps !

A.6 SOUS-ANNEAUX DES MATRICES DE TAILLE 2×2

- ❶ Soit $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est scalaire}\}$. Alors S forme un corps pour la somme et le produit de matrices. En fait l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow S$ définie par $f(a) = aI_2$ est un isomorphisme qui identifie S avec le corps des nombres réels.
- ❷ Soit $M = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = a_{22} \text{ et } a_{12} = -a_{21}\}$. Alors M forme un corps.

Puisque la somme est associative et commutative et que le produit est associatif et distributif pour **toutes** les matrices, on vérifie seulement la commutativité du produit dans M et l'existence d'un inverse pour tout élément non nul de M .

A.6 M EST UN CORPS



A.7 ARITHMÉTIQUE MODULAIRE

Comme pour $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ on peut considérer l'ensemble des nombres entiers $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

On regarde ces nombres comme tous les restes possibles de la division par n , ce qui nous permet de définir une somme et un produit en calculant dans $\mathbb{Z}$, mais en ne gardant que le reste de la division. Ainsi

- ❶ Dans $\{0, 1, 2\}$ on calcule $2 + 2 =$
- ❷ Dans $\{0, 1, 2\}$ on calcule $2^3 =$
- ❸ Dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ on calcule $3 \cdot 4 =$
- ❹ Dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ on calcule $1 - 4 =$
- ❺ Dans $\{0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11\}$ on calcule $10 \cdot 6 =$

A.8 LE CORPS $\mathbb{F}_p$

PROPOSITION

Lorsque n n'est pas un nombre premier les opérations définies ci-dessus ne forment pas un corps.

Preuve. Comme n n'est pas premier, $n = a \cdot b$ pour $1 < a, b < n$. Ainsi le nouveau produit $a \cdot b$ est nul. Alors a ne peut pas avoir d'inverse car sinon $b = 1 \cdot b = a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 = 0$. $\square$

THÉORÈME

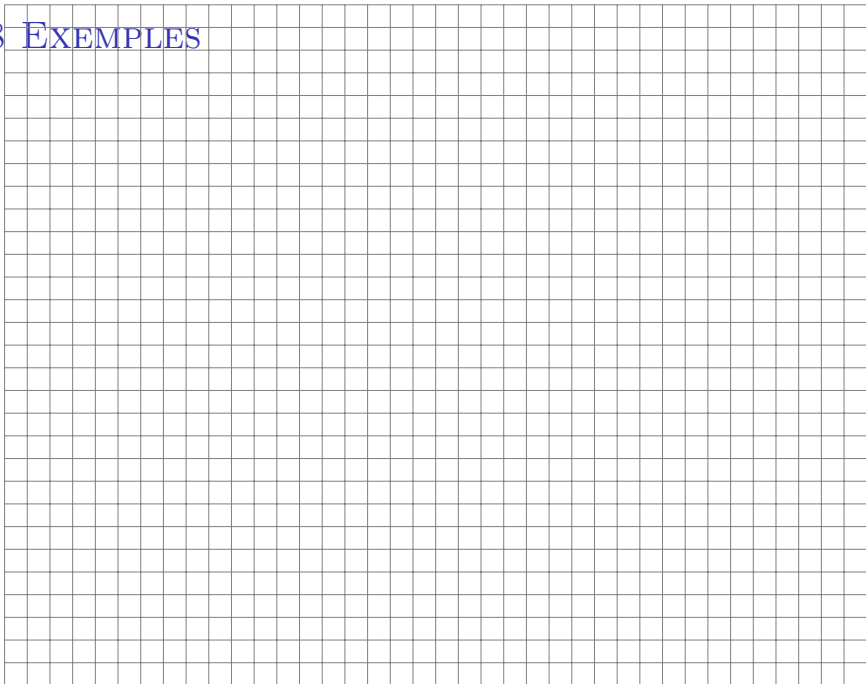
Lorsque p est un nombre premier les opérations définies ci-dessus forment un corps $\mathbb{F}_p$.

Les seules propriétés qui ne découlent pas de celles de la somme et du produit dans $\mathbb{Z}$ sont l'existence d'opposé et d'inverse.

A.8 PREUVE



A.8 EXAMPLES



5.3.5 CRITÈRE DE DIAGONALISATION

En général, pour diagonaliser une matrice sur $\mathbb{R}$, il faut qu'il y ait assez de valeurs propres réelles **et** assez de vecteurs propres.

THÉORÈME

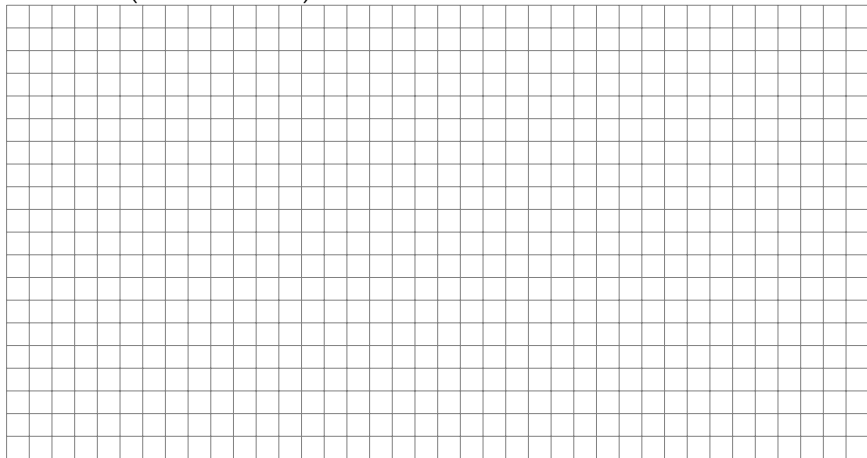
Une matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

- ❶ Le polynôme caractéristique est **scindé** sur $\mathbb{R}$: il se décompose en produit de facteurs $(\lambda - t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ❷ Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$.

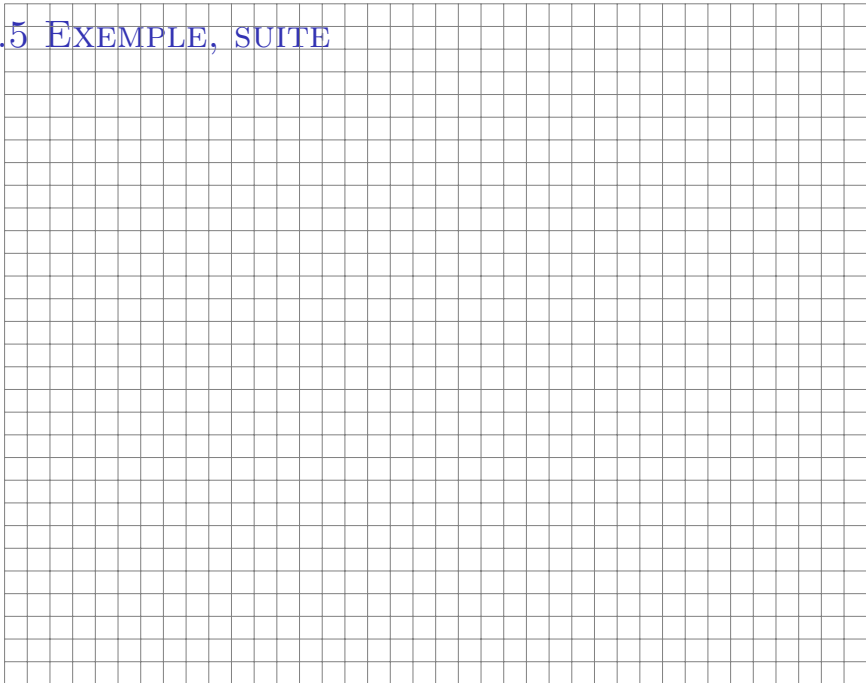
Si A est diagonalisable on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propre.

5.3.5 EXEMPLE

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. On constate sans faire de calculs :



5.3.5 EXEMPLE, SUITE



5.3.6 DIAGONALISABILITÉ : MÉTHODE

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

- 1 Choisir une base $\mathcal{C}$ de V (la base canonique si elle existe).
- 2 Ecrire la matrice $A = (T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ de T dans cette base.
- 3 Calculer le polynôme caractéristique $c_A(t)$.
- 4 Si $c_A(t)$ n'est pas scindé, A n'est pas diagonalisable.
- 5 Si $c_A(t)$ est scindé, extraire les racines λ de $c_A(t)$ et calculer les multiplicités algébriques.
- 6 Calculer les espaces propres E_λ et les multiplicités géométriques.
- 7 Si $\dim E_\lambda \neq \text{mult}(\lambda)$ pour une valeur propre λ , alors A n'est pas diagonalisable.
- 8 Si $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$ pour tout λ , alors A est diagonalisable.

5.3.7 DIAGONALISATION : MÉTHODE

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire diagonalisable.

- 1 Choisir une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ pour toute valeur propre λ .
- 2 Réunir les $\mathcal{B}_\lambda$ pour former une base $\mathcal{B}$ de V .
- 3 $D = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale. Les valeurs propres apparaissent dans la diagonale dans l'ordre choisi pour construire la base $\mathcal{B}$.
- 4 Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés en coordonnées dans $\mathcal{C}$.
- 5 $D = P^{-1}AP$ et $A = PDP^{-1}$.

5.3.7 EXEMPLE : CHOIX D'UNE BASE POUR T

Soit W le plan de $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$. On considère l'application linéaire $T : W \rightarrow W$ donnée par la formule

$$T \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9y + z \\ 3y - 8z \\ -12y + 7z \end{pmatrix}$$

- ❶ On vérifie d'abord que $T\vec{w} \in W$ pour tout $\vec{w} \in W$.
- ❷ On choisit ensuite une base $\mathcal{C}$ de W , par exemple

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

5.3.7 EXEMPLE : DIAGONALISATION DE T

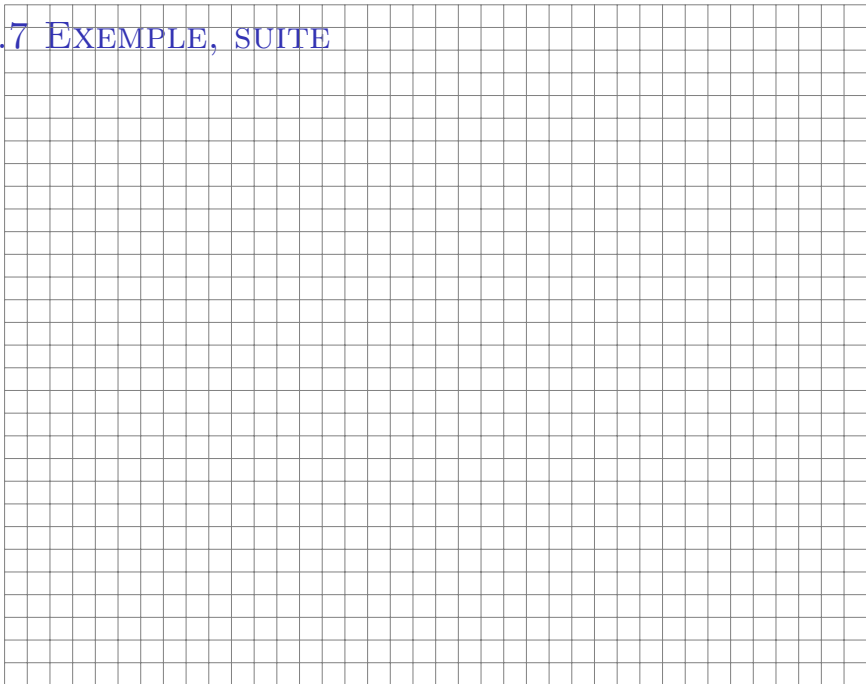
On peut maintenant calculer la matrice A de T , par rapport à la base $\mathcal{C}$. Il faut toutefois calculer les images des vecteurs de base :

$$T(c_1) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ \textcolor{red}{1} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{12}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \textcolor{red}{1} \end{pmatrix} = \frac{3}{5}c_1 - \frac{12}{5}c_2$$

$$T(c_2) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{8}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2$$

Par conséquent $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$

5.3.7 EXEMPLE, SUITE



5.3.7 EXEMPLE : UNE NOUVELLE BASE

La base de vecteurs propres choisie pour diagonaliser A est par exemple formée de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. A quelle base de W ces vecteurs correspondent-ils ? Ces vecteurs sont donnés en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ puisque A est la matrice de T par rapport à $\mathcal{C}$:

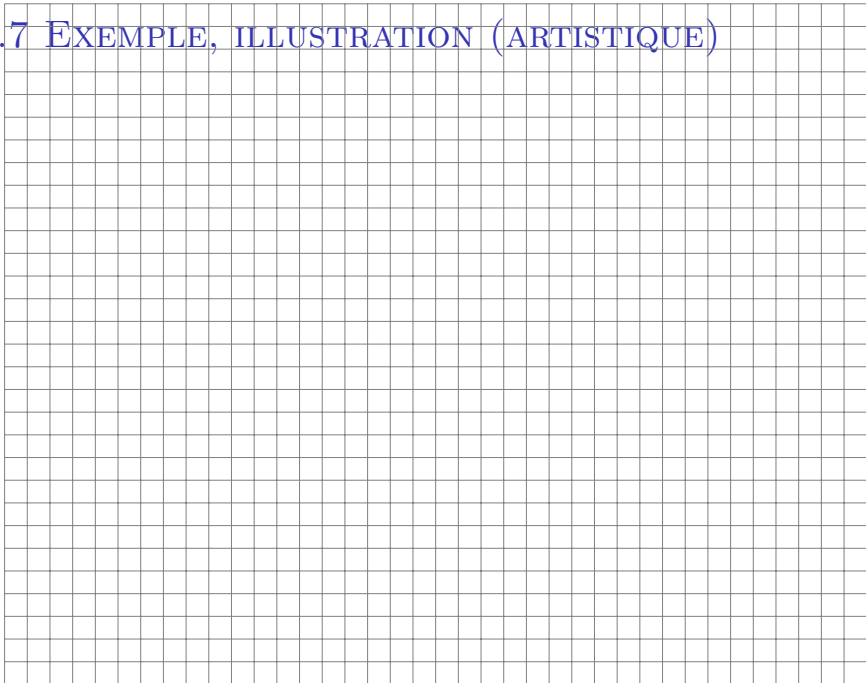
$$(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{C}} = (T(x))_{\mathcal{C}}$$

Par exemple $b_1 = c_1 + c_2$. Ainsi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

La signification géométrique de T est maintenant transparente !

5.3.7 EXEMPLE, ILLUSTRATION (ARTISTIQUE)



5.4.1 LA TRACE

DÉFINITION

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. La **trace**

$$\text{Tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Ce nombre se lit comme le coefficient de t^{n-1} dans le polynôme caractéristique $c_A(t)$, au signe près.

LEMME

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

THÉORÈME

Si A est diagonalisable, alors la trace de A est égale à la somme des valeurs propres.

5.4.2 DEUX COMPLÉMENTS

THÉORÈME

Soit A une matrice carrée telle que $c_A(t)$ est scindé. Alors A est **triangularisable** (A est semblable à une matrice triangulaire).

Le théorème suivant affirme que le polynôme caractéristique “annule” la matrice A .

THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON

Soit $c_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots a_1t + a_0$ le polynôme caractéristique de A . Alors

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots a_1A + a_0I_n = 0$$

5.6.1 APPLICATION : CALCUL DE PUISSANCES

Soit A une matrice diagonalisable. Il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Mais alors on a aussi

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \quad \text{et} \quad A^k = PD^kP^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$