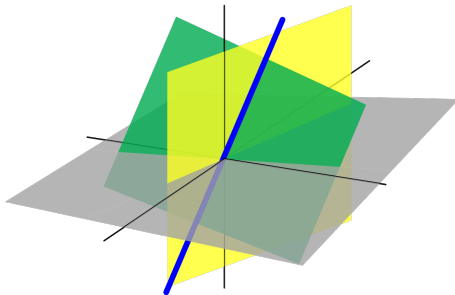


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 19 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



5.2.1 LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

DÉFINITION

Soit A une matrice $n \times n$. Le **polynôme caractéristique** de A est $c_A(t) = \det(A - tI_n)$.

THÉORÈME

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si c'est une racine de $c_A(t)$, i.e. $\det(A - \lambda I) = 0$.

Sa multiplicité en tant que racine est appelée **multiplicité algébrique**.

DÉFINITION

Soit λ une valeur propre de A . La **multiplicité géométrique** de λ est $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$.

5.2.2 SIMILITUDE $\approx$

DÉFINITION

Deux matrices carrées A et B de taille $n \times n$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P de taille $n \times n$ telle que

$$A = P^{-1}BP.$$

On note $A \approx B$.

THÉORÈME

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres.

La réciproque est fausse, puisque la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même, mais la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a également t^2 comme polynôme caractéristique.

5.2.2 EXEMPLE

Attention ! Deux matrices ayant les mêmes valeurs propres ne sont pas semblables en général. La matrice A est un **bloc de Jordan** :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La seule valeur propre de A et de B est 5, de multiplicité algébrique 2 car $c_A(t) = (t - 5)^2 = c_B(t)$. Mais

$$\boxed{A \not\sim B}$$

En effet

$$P \cdot B \cdot P^{-1} = P \cdot (5I_2) \cdot P^{-1} = 5P \cdot I_2 \cdot P^{-1} = 5P \cdot P^{-1} = 5I_2 = B.$$

La multiplicité géométrique de 5 est 1 pour la matrice A , mais 2 pour B .

5.2.3 LES RELATIONS $\sim$ ET $\approx$

- ❶ Deux matrices A et B de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes selon les lignes et les colonnes s'il existe des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qui transforment A en B .
- ❷ Or, effectuer des opérations sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible P ;
- ❸ et effectuer des opérations sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par une matrice inversible Q .

DÉFINITION

Les matrices A et B sont **équivalentes** s'il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $PAQ = B$. On note $A \sim B$.

On note $A \sim B$. Clairement $A \approx B \Rightarrow A \sim B$.

5.2.4 CALCUL DU POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Par manque d'inspiration on calcule $c_A(t)$ avec Sarrus

$$\begin{vmatrix} 4-t & 0 & -1 \\ -1 & -t & 4 \\ 0 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = -t^3 + 7t^2 - 4t - 30$$

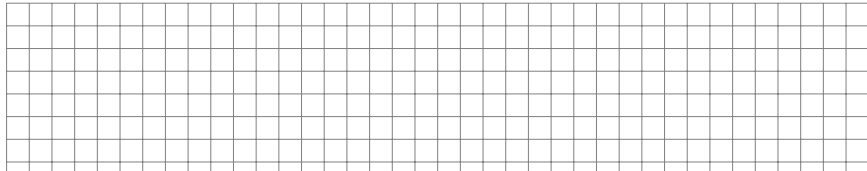
Ce n'est pas facile de voir que les racines de $c_A(t)$ sont 5 , $1 - \sqrt{7}$ et $1 + \sqrt{7}$...

5.2.4 LE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE AVEC DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

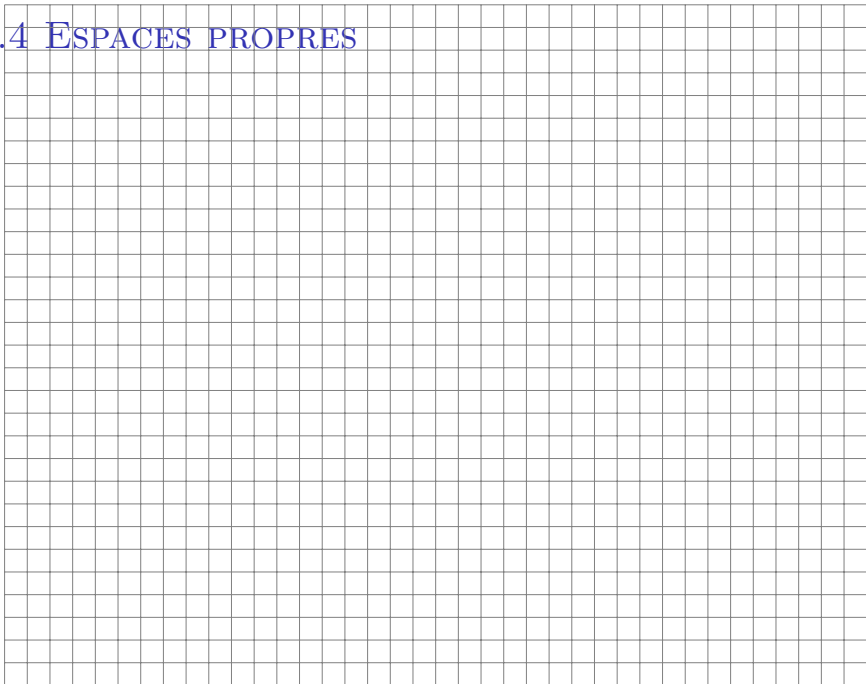
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - z \\ -6x - y + 4z \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

Alors $A = (f)_{\text{can}}^{\text{can}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons $c_A(t)$.



5.2.4 $c_A(t)$ AVEC DES OPÉRATIONS

5.2.4 ESPACES PROPRES



5.3.1 DIAGONALISATION

DÉFINITION

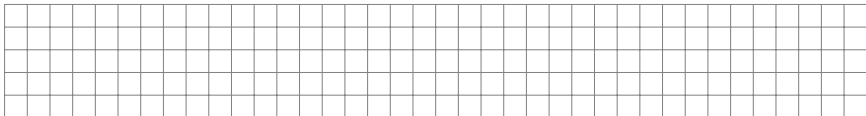
Une matrice est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, i. e. il existe P inversible telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.

THÉORÈME

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

Preuve. On regarde A comme la matrice de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dans la base canonique : $T\vec{x} = A \cdot \vec{x}$ et $(T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = A$. Soit $\mathcal{B}$ une autre base. Alors $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ est diagonale $\iff T(\vec{b}_i) = \lambda_i \vec{b}_i \iff (T(\vec{b}_i))_{\mathcal{B}} = \lambda_i \vec{e}_i$. Dans la base $\mathcal{B}$ les coordonnées de $T(\vec{b}_i)$ sont nulles sauf la i -ème.

5.3.2 OBSERVATIONS



- 1 Les colonnes de la matrice de changement de base $P = (\text{Id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}^{an}}$ sont les vecteurs propres de la base $\mathcal{B}$.
- 2 $A = PDP^{-1}$ et D est diagonale, les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A se trouvent dans la diagonale, dans l'ordre choisi pour construire la base.
- 3 Le déterminant de A est le produit des valeurs propres (avec multiplicité).

En effet

$$\begin{aligned}\det A &= \det(PDP^{-1}) = \det P \det D \det(P^{-1}) \\ &= \det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n\end{aligned}$$

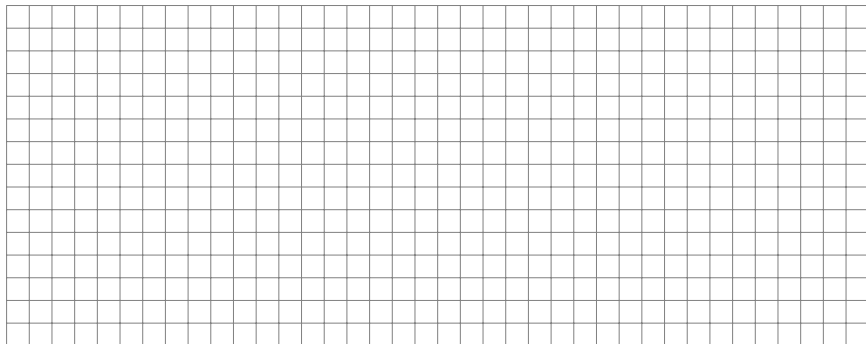
5.3.2 EXEMPLE

Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + d & b - c \\ c - b & a + d \end{pmatrix}$$

On commence par écrire la matrice de T dans la base canonique.

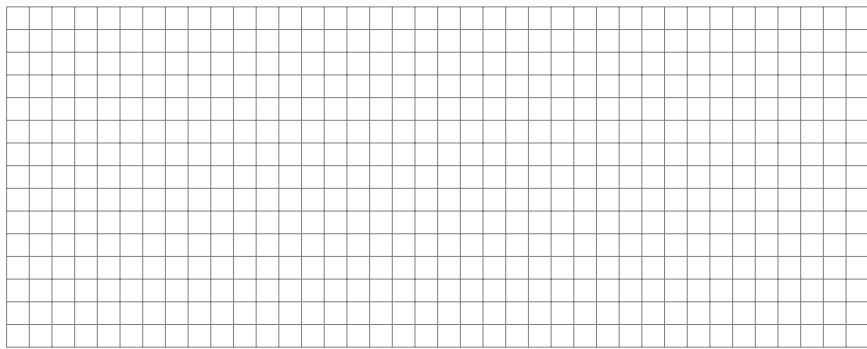
Cette matrice est de taille 4×4 !



5.3.2 EXEMPLE, SUITE

On calcule le polynôme caractéristique

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & -1 & 0 \\ 0 & -t & -t & 0 \\ 2-t & 0 & 0 & 2-t \end{vmatrix}$$



5.3.2 EXAMPLE, FIN



5.3.3 PREMIER CRITÈRE DE DIAGONALISATION

THÉORÈME

Soit A une matrice de taille $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes. Alors A est diagonalisable.

Preuve. Pour chaque valeur propre on a un vecteur propre. Ces n vecteurs sont libres par 5.1.5 et forment alors une base de $\mathbb{R}^n$. $\square$

PROPOSITION

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de A . Alors $E_\lambda \cap E_\mu = \{\vec{0}\}$.

Preuve. Soit $\vec{x} \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, et aussi $A\vec{x} = \mu\vec{x}$. Comme $\mu \neq \lambda$, alors $\vec{x} = \vec{0}$. $\square$

REMARQUE

Les espaces propres E_λ et E_μ forment une somme directe $E_\lambda \oplus E_\mu$.

5.3.4 MULTIPLICITÉS

PROPOSITION

Soit λ une valeur propre de A . Alors $1 \leq \dim E_\lambda \leq \text{mult}(\lambda)$.

Preuve. E_λ contient un vecteur propre, **non nul** : $1 \leq \dim E_\lambda$. Si $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ est une base de E_λ , on peut la compléter en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base la matrice devient

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \lambda & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est le même que celui de A et commence par $(\lambda - t)^k$. Donc $k \leq \text{mult}(\lambda)$. $\square$

5.3.5 CRITÈRE DE DIAGONALISATION

Les deux propositions ci-dessus sont les clés de notre deuxième critère. Il faut qu'il y ait assez de valeurs propres réelles **et** assez de vecteurs propres.

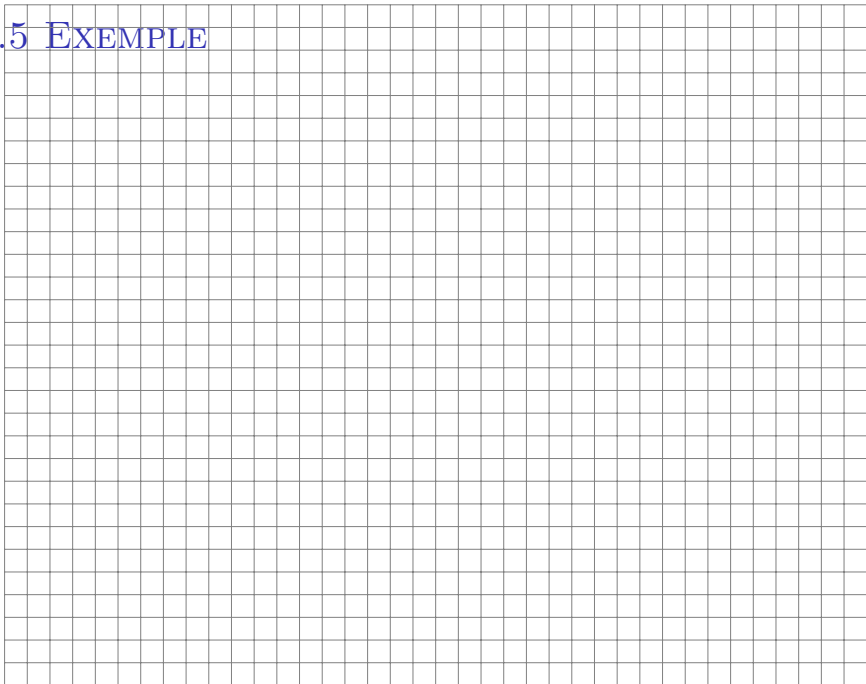
THÉORÈME

Une matrice A est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si

- 1 Le polynôme caractéristique est **scindé** : il se décompose en produit de facteurs $(\lambda - t)$ avec des $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 2 Pour tout λ , on a $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$.

Si A est diagonalisable on forme une base de vecteurs propres en réunissant les vecteurs de base de chaque espace propre.

5.3.5 EXAMPLE



A.1 LES CORPS : DÉFINITION

Jusqu'ici nous avons développé des méthodes qui permettent de travailler avec des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ et nous avons aussi constaté que cela fonctionne dans $\mathbb{Q}$. Il y a beaucoup d'autres *corps de nombres* ! Vous connaissez bien sûr les nombres complexes, $\mathbb{C}$, et on pourrait refaire la théorie de la diagonalisation sur les complexes, nous en verrons d'autres.

DÉFINITION

Un **corps** K est un ensemble muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\cdot$ pour lesquelles les règles de calcul "usuelles" s'appliquent.

A.1 LES CORPS : DÉFINITION

Plus précisément on demande que

- ❶ $(K, +)$ est un **groupe abélien** : il vérifie les axiomes d'associativité, de commutativité, il y a un élément neutre 0 et chaque nombre x admet un opposé $-x$.
- ❷ Le produit est associatif, commutatif, il existe un élément neutre 1 et chaque nombre $x \neq 0$ admet un inverse x^{-1} .
- ❸ La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $x(y + z) = xy + xz$ pour tous $x, y, z \in K$.

A.2 EXEMPLE : LE CORPS $\mathbb{F}_2$

Soit $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. On définit somme et produit par les tables :

+	0	1
---	---	---

0	0	1
---	---	---

1	1	0
---	---	---

·	0	1
---	---	---

0	0	0
---	---	---

0	0	1
---	---	---

REMARQUE

La symétrie des tableaux montre la commutativité des opérations. Pour $+$ la ligne de 0 montre que c'est un élément neutre et pour $\cdot$ c'est celle de 1 qui le prouve.

A.3. APPLICATION : LE CODE DE HAMMING

En 1946 l'ingénieur Hamming invente le premier code autocorrecteur pour ordinateurs à cartes perforées.



Son idée est d'ajouter à chaque mot de 4 bits $d_1 d_2 d_3 d_4$ dans $(\mathbb{F}_2)^4$ un mot de 3 bits de contrôle formé par les sommes dans $\mathbb{F}_2$:

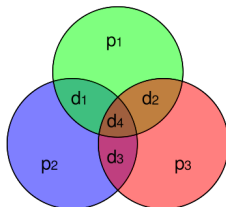
❶ $d_1 + d_2 + d_4$

❷ $d_1 + d_3 + d_4$

❸ $d_2 + d_3 + d_4$

A.3. LE CODE DE HAMMING

On utilise 16 signes comme alphabet de base : 0000, 0001, ..., 1110, 1111. On visualise les bits de contrôle p_1 , p_2 et p_3 comme suit :



Si une erreur se glisse dans la transmission, le code est capable de s'autocorriger. Si le mot $d_1d_2d_3d_4p_1p_2p_3 = 1001010$ est transmis, la parité de $d_1 + d_2 + d_4$ est correcte, mais les deux autres sont erronés. Ainsi il faut corriger le seul nombre commun aux bits de contrôle p_2 et p_3 qui n'apparaît pas dans p_1 .