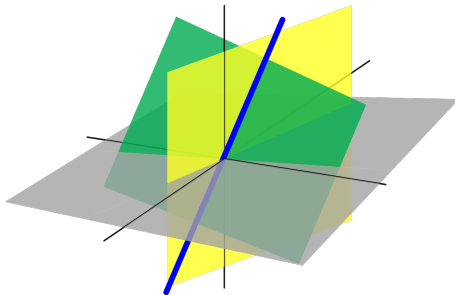


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 12 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



4.7 CHANGEMENT DE BASE : RAPPELS

Soit V un espace vectoriel de dimension n .

- 1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. On peut alors écrire un vecteur $x \in V$ en **coordonnées** $(x)_{\mathcal{B}}$, où $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.
- 2 Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base. On peut alors écrire un vecteur $x \in V$ en **coordonnées** $(x)_{\mathcal{C}}$.
- 3 Pour passer de $(x)_{\mathcal{B}}$ à $(x)_{\mathcal{C}}$, on utilise la **matrice de changement de base** $P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ dont les colonnes sont $(e_i)_{\mathcal{C}}$.
Alors

$$P(x)_{\mathcal{B}} = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$$

- 4 La matrice de changement de base **inverse** $Q = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1}$.

4.7.3 EXEMPLE

On considère les bases $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On écrit la matrice “doublement augmentée” :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right]$$

En effet échelonner et réduire cette matrice correspond à trouver simultanément les nombres x_1 et x_2 tels que $x_1 \vec{c}_1 + x_2 \vec{c}_2 = \vec{b}_1$ et y_1, y_2 tels que $y_1 \vec{c}_1 + y_2 \vec{c}_2 = \vec{b}_2$.

4.7.3 EXEMPLE, SUITE

On échelonne donc :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & -10 & 9 \end{array} \right]$$

ce qui signifie que $9\vec{c}_1 - 10\vec{c}_2 = \vec{b}_1$ et $-8\vec{c}_1 + 9\vec{c}_2 = \vec{b}_2$.

Nous avons trouvé les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$. Ainsi la matrice de changement de base

$$P = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -10 & 9 \end{bmatrix} \text{ et donc } (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 10 & 9 \end{bmatrix}$$

4.7.3 ENCORE UN EXEMPLE

On travaille dans l'espace vectoriel W des matrices symétriques de taille 2×2 (telles que $A = A^T$). Ainsi

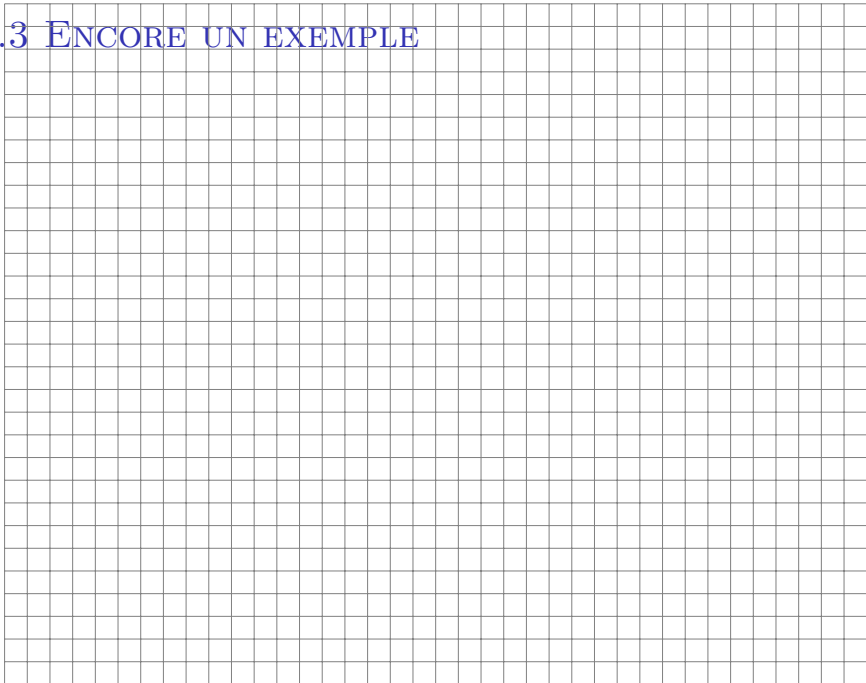
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

On considère deux bases $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3)$ et $\mathcal{C} = (C_1, C_2, C_3)$:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

4.7.3 ENCORE UN EXEMPLE



4.7.4 DOUBLE CHANGEMENT DE BASE

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ trois bases de V .

$$(Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$$

Preuve. La composition $(V, \mathcal{B}) \xrightarrow{Id} (V, \mathcal{C}) \xrightarrow{Id} (V, \mathcal{D})$ est l'identité. La multiplication matricielle correspond à la composition. Explicitement :

$$(Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} (Id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(x)_{\mathcal{B}} = (Id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}(x)_{\mathcal{C}} = (x)_{\mathcal{D}}$$

REMARQUE

C'est donc un cas particulier de la formule de matrice d'une composition d'applications linéaires.

5.1.0 MOTIVATION

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

OBJECTIF

Trouver une base $\mathcal{B}$ de V telle que $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ soit facilement compréhensible.

Pour comprendre comment la matrice de T est modifiée lorsque la base change, les matrices de changement de base interviennent.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

5.1.0 MOTIVATION, SUITE

Alors

$$A = (f)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{C}_{an}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Mais qui donc est cette application f ? On “se rend compte” que certains vecteurs sont **fixés** par f alors que d'autres sont **renversés**.

Autrement dit

- ❶ il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\vec{x} = \vec{x}$;
- ❷ il existe des vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tels que $A\vec{x} = -\vec{x}$.

5.1.0 MOTIVATION, SUITE



5.1.0 MOTIVATION, SUITE



5.1.0 CONCLUSION

La matrice de f dans la base nouvelle $\mathcal{B}$ est **diagonale** !

- 1 Elle est plus parlante **géométriquement**.
- 2 Elle est plus facile à manipuler **algébriquement**, par exemple pour calculer ses puissances.

5.1.1 VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

DÉFINITION

Un vecteur non nul $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est un **vecteur propre** de A s'il existe un nombre λ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. On appelle alors λ une **valeur propre** de A . L'**espace propre** E_λ est formé de TOUS les vecteurs $\vec{x}$ tels que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Attention ! Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $A\vec{0} = \lambda\vec{0}$. Il est crucial de demander que $\vec{x}$ soit non nul ! Une valeur propre est une denrée rare ! Par contre $\vec{0} \in E_\lambda$.

DÉFINITION

Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire. Un vecteur non nul $x \in V$ est un **vecteur propre** de T si $T(x) = \lambda x$.

5.1.2 COMPARAISON

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire.

Soit $A = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.

PROPOSITION

Un vecteur x est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ si et seulement si $(x)_{\mathcal{B}}$ est un vecteur propre de A pour la même valeur propre λ .

Preuve. $A(x)_{\mathcal{B}} = (T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(x)_{\mathcal{B}} = (T(x))_{\mathcal{B}}$.

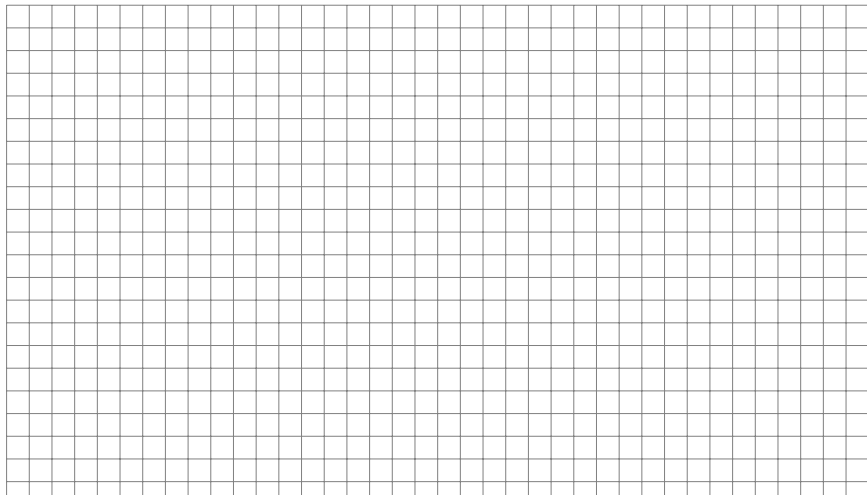
Ainsi $T(x) = \lambda x$ si et seulement si $A(x)_{\mathcal{B}} = \lambda(x)_{\mathcal{B}}$



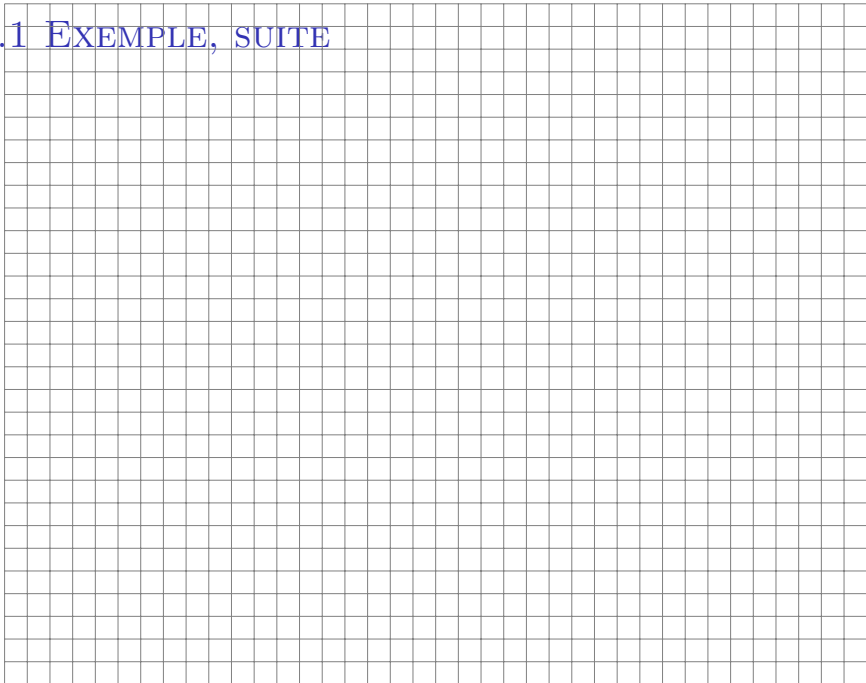
5.1.2 EXEMPLE

Soit $T: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ l'application linéaire définie par

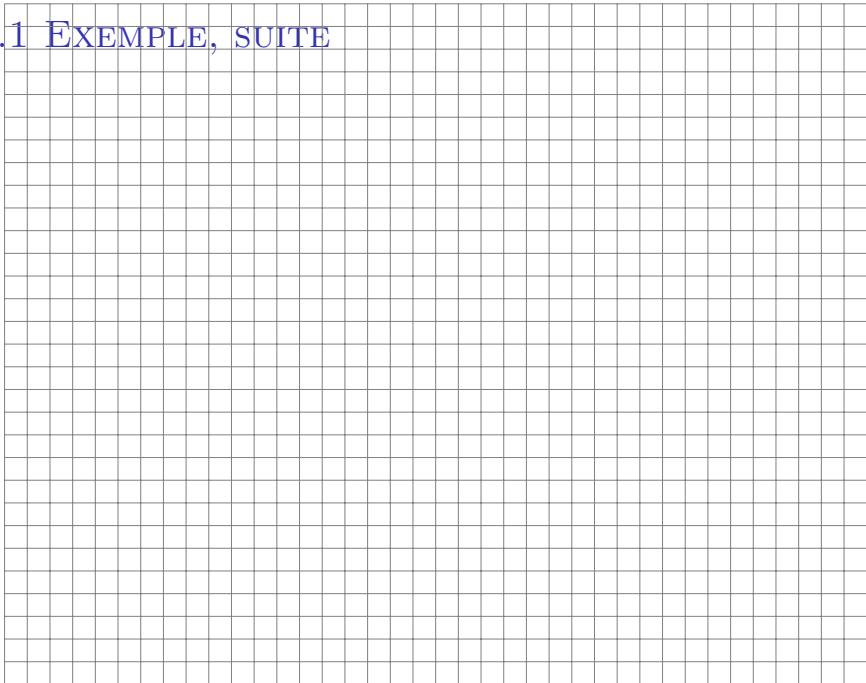
$$T(a + bt) = -a + 3b + (2a + 4b)t$$



5.1.1 EXEMPLE, SUITE



5.1.1 EXEMPLE, SUITE



5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

PROPOSITION

Un nombre λ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A - \lambda I_n$ est non nul.

Preuve. Si λ est valeur propre de A , il existe un vecteur non nul $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Autrement dit

$$\vec{0} = A\vec{x} - \lambda\vec{x} = A\vec{x} - \lambda I_n \vec{x} = (A - \lambda I_n) \vec{x}$$

par distributivité de la multiplication matricielle. Ainsi un vecteur propre est une solution non nulle de l'équation homogène

$(A - \lambda I_n) \vec{x} = \vec{0}$. En conclusion un vecteur propre existe pour λ si et seulement si $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est non nul. □

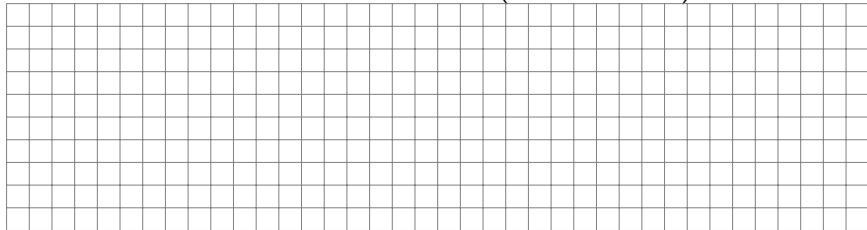
5.1.3 VALEURS PROPRES ET NOYAUX

REMARQUE

Chercher une valeur propre λ de la matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ revient à chercher un nombre λ tel que $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension ≥ 1 .

Par le Théorème du rang, ceci revient à chercher λ avec $\text{rang}(A - \lambda I_n) < n$, ou encore $A - \lambda I_n$ non inversible.

Exemple. La matrice de rotation $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.



5.1.3 EXEMPLE, SUITE

