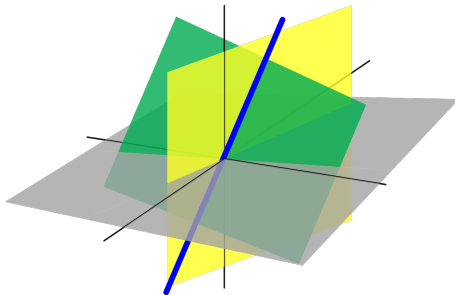


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 7 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



5.4.1 UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures, avec la base choisie $\mathcal{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{22})$. On considère $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(2) \end{pmatrix}$$

En choisissant la base canonique $\mathcal{Can} = (1, t, t^2)$ on identifie $\mathbb{P}_2$ avec $\mathbb{R}^3$ et en choisissant la base ci-dessus de W on identifie W avec $\mathbb{R}^3$ également.

Pour associer à T une matrice on calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{Can}$ et on les exprime en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

5.4.1 LES IMAGES DES VECTEURS DE BASE

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_1 \text{ et } (W_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = W_2 \text{ et } (W_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

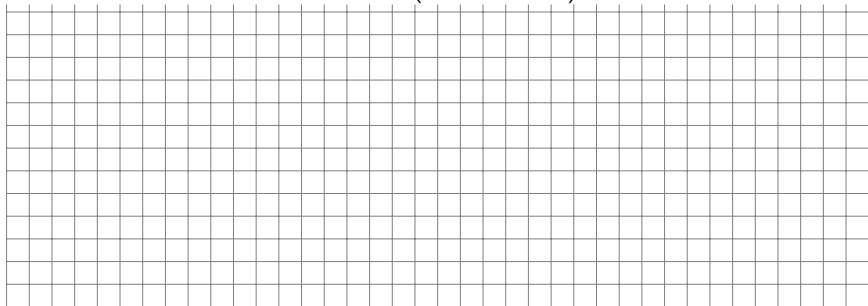
$$T(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = W_3 \text{ et } (W_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

But : Calculer l'image par T du polynôme $1 - t + 3t^2$, de deux manières.

5.4.1 LA MATRICE DE T

On représente T , après avoir choisi les bases $\mathcal{C}an$ de $\mathbb{P}_2$ et $\mathcal{B}$ de W , par la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de la base $\mathcal{C}an$ exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = (T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



5.4.2 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

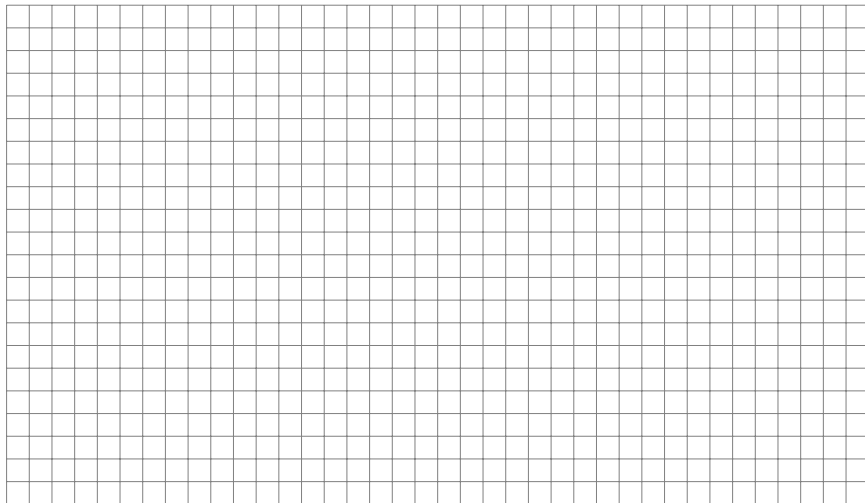
On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

5.4.2 ILLUSTRATION.

Cette formule dit en fait que les deux chemins possibles pour aller d'un coin à l'autre du carré suivant donnent le même résultat :



5.4.2 PREUVE.



5.4.2 UN CAS CONNU

REMARQUE

Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ et que les bases choisies sont les bases canoniques, la matrice d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la matrice de T au sens du chapitre 1.9.

En effet $(T)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{C}_{an}}$ est par définition la matrice dont les colonnes sont les images $T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)$, exprimées en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{C}_{an}$. Or, les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^m$ par rapport à la base canonique sont simplement ses coefficients.

5.4.2 EXEMPLE : UNE ROTATION

Soit $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\pi/2$.

Nous connaissons $(r)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais, si on choisit la base canonique pour l'espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^2$, et à l'arrivée la nouvelle base $\mathcal{C}$ donnée par

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{r(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 \quad \text{et} \quad r(\vec{e}_2) = \vec{f}_2}$$

$$(r)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

5.4.2 CONCLUSION

On perd trop d'information lorsqu'on permet de choisir des bases arbitraires au départ et à l'arrivée.

FAIT

La seule information qui reste est le **rang** de l'application linéaire : deux matrices de même taille et de même rang représentent la même application linéaire.

DÉCISION

Pour étudier des applications linéaires $T : V \rightarrow V$ nous choisirons une seule base de V , la même pour l'espace vectoriel de départ et d'arrivée.

But. Trouver la meilleure base pour comprendre T .

4.7.1 CHANGEMENT DE BASE

- V est un espace vectoriel,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V ,
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de V .

DÉFINITION

La matrice de **changement de base** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est la matrice $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont $(e_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (e_n)_{\mathcal{C}}$.

La matrice de changement de base est donc la matrice de l'application linéaire identité, mais pour des choix différents en général de base au départ et à l'arrivée. Ici $Id_V(e_i) = e_i$.

Question. Pourquoi cette matrice mérite-t-elle le nom de matrice de *changement de base*?

4.7.2 THÉORÈME DU CHANGEMENT DE BASE

La matrice de changement de base permet de calculer les coordonnées dans la **nouvelle base** $\mathcal{C}$ si on connaît celles dans l'**ancienne base** $\mathcal{B}$.

THÉORÈME

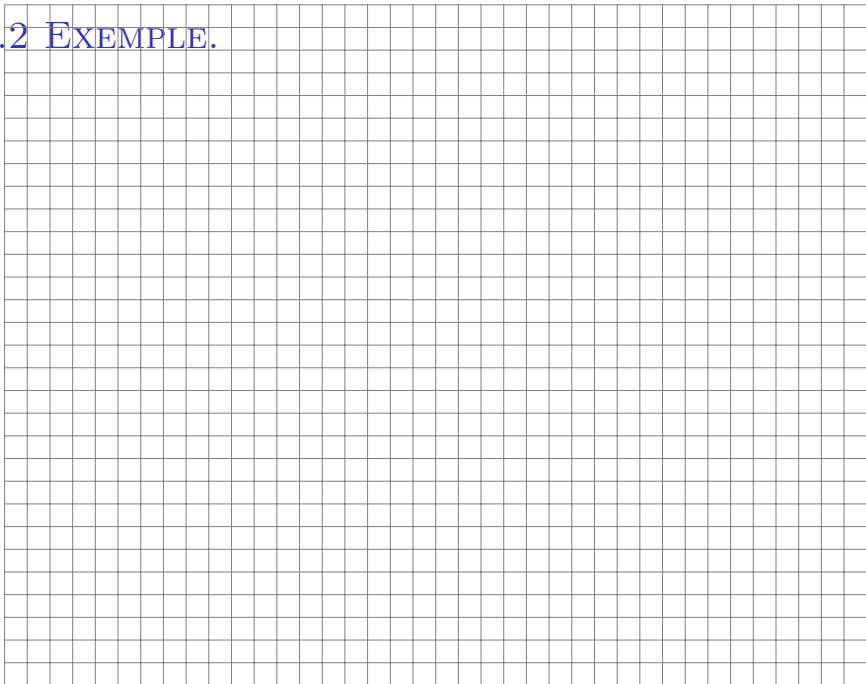
$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

Preuve. Cela découle du résultat plus général démontré ci-dessus !

En effet

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Id_V(v))_{\mathcal{C}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

4.7.2 EXAMPLE.



5.4.2 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

5.4.3 LA COMPOSITION

- ❶ Soit U un espace vectoriel munis d'une base $\mathcal{B}$,
- ❷ soit V un espace vectoriel munis d'une base $\mathcal{C}$, et
- ❸ soit W un espace vectoriel munis d'une base $\mathcal{D}$.
- ❹ Soit $S : U \rightarrow V$ une application linéaire, et
- ❺ soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

PROPOSITION

Les matrices $(T \circ S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}$ et $(T)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot (S)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ sont égales.

La raison en est que la multiplication matricielle a été définie pour qu'elle corresponde à la composition !

5.4.3 PREUVE



5.4.3 EXEMPLE

- 1 Soit h une homothétie de rapport 3 dans $\mathbb{R}^3$ et
- 2 p la projection orthogonale sur le plan π d'équation $x + y + z = 0$.
- 3 $T = p \circ h$.

RAPPEL : DISTANCE D'UN POINT À UN PLAN

La distance de (x_0, y_0, z_0) au plan $ax + by + cz = 0$ vaut

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan $ax + by + cz = 0$.

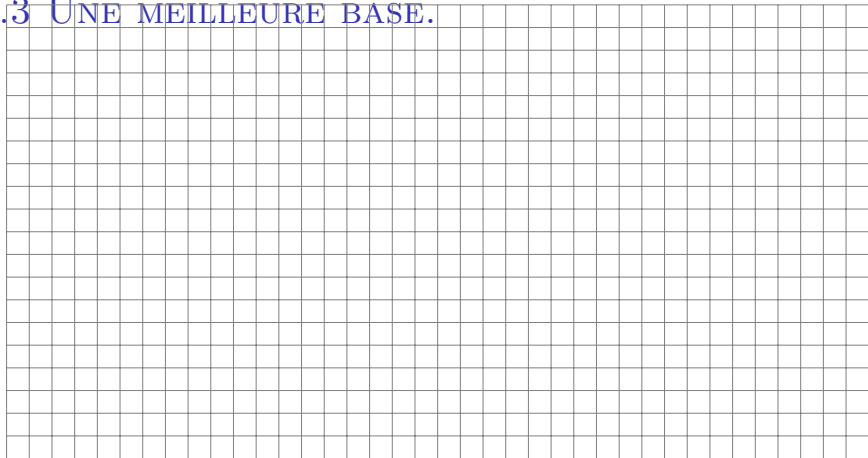
5.4.3 EXEMPLE, SUITE.

Dans la base canonique $\mathcal{C}an$ la matrice $H = (h)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an}$ est diagonale avec des 3 dans la diagonale. Pour trouver la matrice P de p , dans $\mathcal{C}an$ on calcule les projections des vecteurs de cette base.



5.4.3 EXEMPLE : LA MATRICE A DE f

5.4.3 UNE MEILLEURE BASE.



L'interprétation géométrique de f est plus transparente dans cette base. On voit que f dilate les vecteurs $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$ d'un facteur 3 et envoie $\vec{b}_3$ sur zéro.

4.7.1, 4.7.2 CHANGEMENT DE BASE, RAPPEL

- V est un espace vectoriel,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V ,
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de V .

DÉFINITION

La matrice de **changement de base** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est la matrice $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont $(e_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (e_n)_{\mathcal{C}}$.

La matrice de changement de base permet de calculer les coordonnées dans la **nouvelle base** $\mathcal{C}$ si on connaît celles dans l'**ancienne base** $\mathcal{B}$.

THÉORÈME

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

4.7.3 INVERSE DE CHANGEMENT DE BASE

THÉORÈME

$$\left((Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \right)^{-1} = (Id_V)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

Preuve. La matrice $P = (Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est inversible car ses colonnes sont linéairement indépendantes (base). On sait aussi que

$$P(x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$$

Multiplions cette égalité à gauche par P^{-1} :

$$(x)_{\mathcal{B}} = P^{-1}P(x)_{\mathcal{B}} = P^{-1}(x)_{\mathcal{C}}$$

Ainsi P^{-1} transforme un vecteur en coordonnées dans $\mathcal{C}$ en coordonnées dans $\mathcal{B}$! □

4.7.3 EXEMPLE

On considère les bases $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On écrit la matrice “doublement augmentée” pour résoudre deux systèmes à la fois :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & -7 \end{array} \right]$$

car on cherche à savoir comment exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $\mathcal{C}$.

4.7.3 EXEMPLE, SUITE

