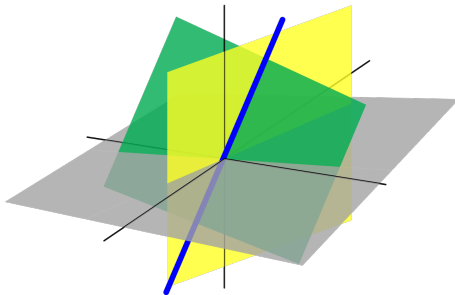


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 5 NOVEMBRE

Jérôme Scherer



4.6.1 REMARQUE IMPORTANTE

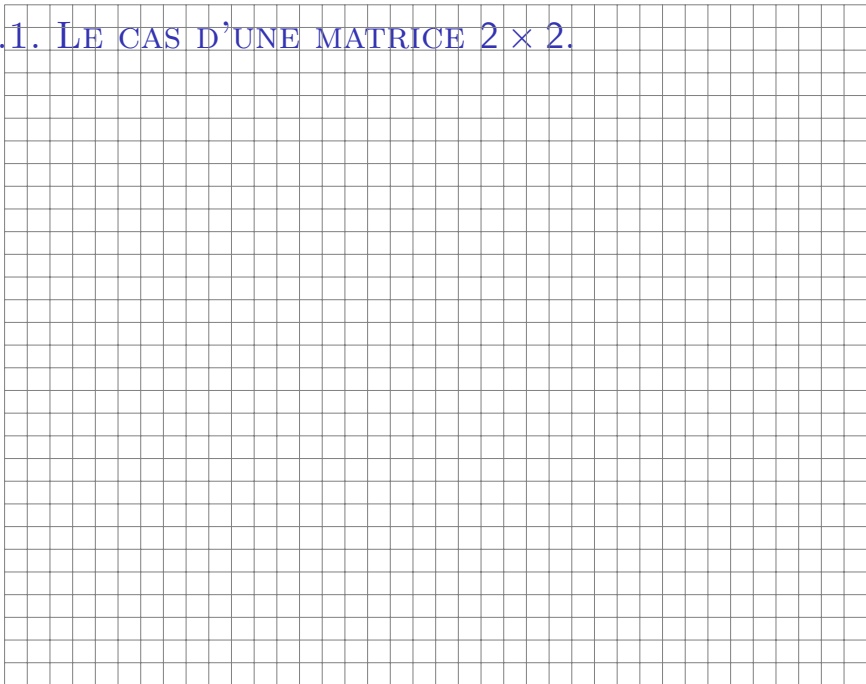
Soit A une matrice de taille $m \times n$.

THÉORÈME

$$\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$$

- 1 Le nombre de lignes linéairement indépendantes est égal au nombre de lignes contenant un pivot.
- 2 Le nombre de colonnes linéairement indépendantes est égal au nombre de colonnes contenant un pivot.
- 3 En résumé, $\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$ car les deux dimensions coïncident avec le nombre de pivots !

4.6.1. LE CAS D'UNE MATRICE 2×2 .



4.6.2 LE RANG

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies.

DÉFINITION

Le **rang** de T est la dimension de l'image de T :

$$\text{rang } T = \dim \text{Im } T.$$

Soit A une matrice $m \times n$, représentant une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

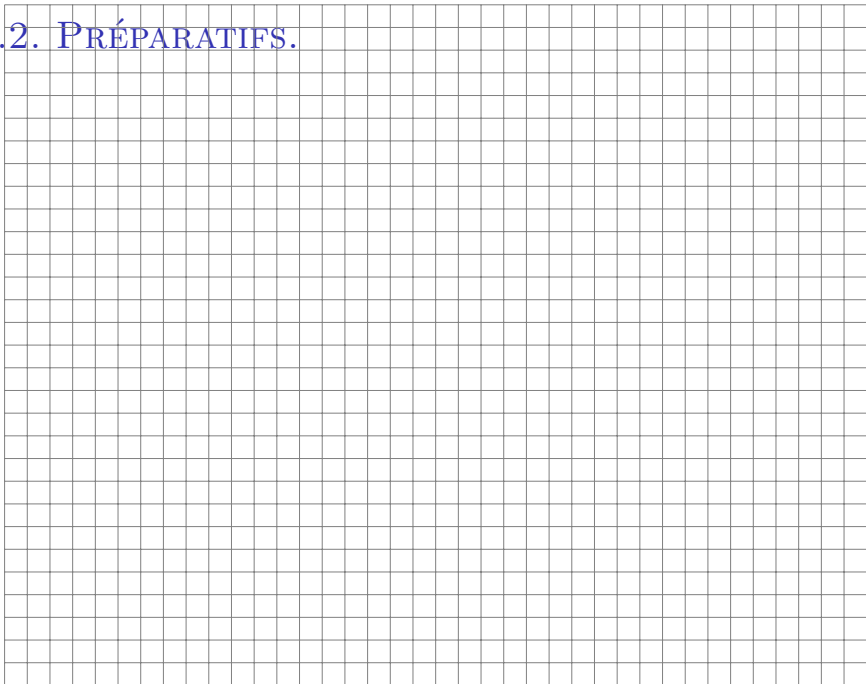
DÉFINITION

Le **rang** de A est la dimension de l'image de A : $\text{rang } A = \dim \text{Im } A$.

THÉORÈME DU RANG

$$\text{rang } T + \dim \text{Ker } T = \dim V$$

4.6.2. PRÉPARATIFS.



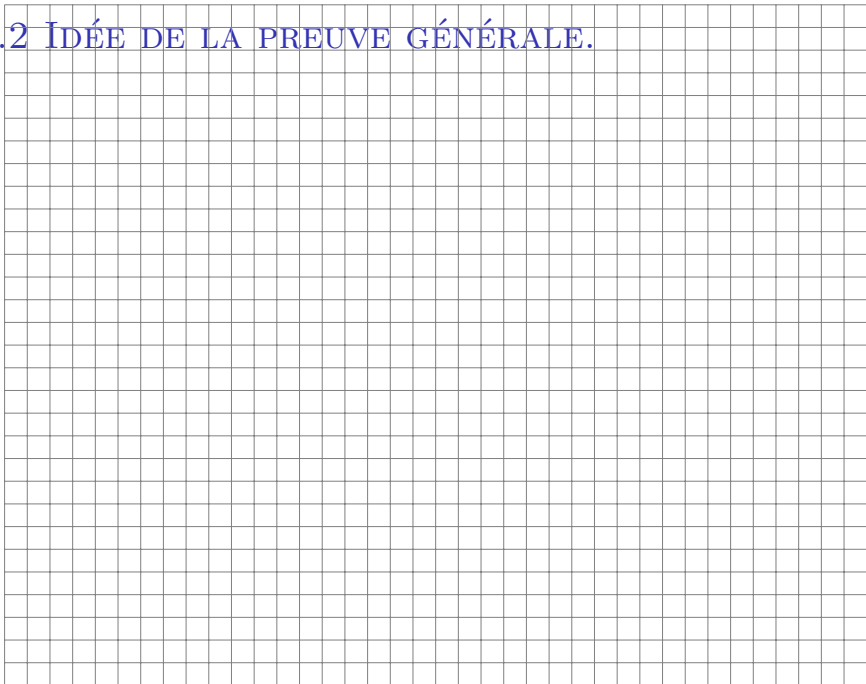
4.6.2 LE THÉORÈME DU RANG

THÉORÈME

$$\text{rang } T + \dim \text{Ker } T = \dim V$$

- ❶ Grâce aux coordonnées on identifie V avec $\mathbb{R}^n$ et W avec $\mathbb{R}^m$.
- ❷ Ainsi on identifie T avec une application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- ❸ Celle-ci est donnée par multiplication matricielle
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} = S(\vec{x}).$$
- ❹ $\dim \text{Ker } A =$ nombre de colonnes sans pivot
- ❺ $\dim \text{Im } A = \text{rang } A =$ nombre de colonnes-pivot
- ❻ nombre de colonnes-pivot + colonnes sans pivot = n . □

4.6.2 IDÉE DE LA PREUVE GÉNÉRALE.



4.6.2 EXEMPLE

Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

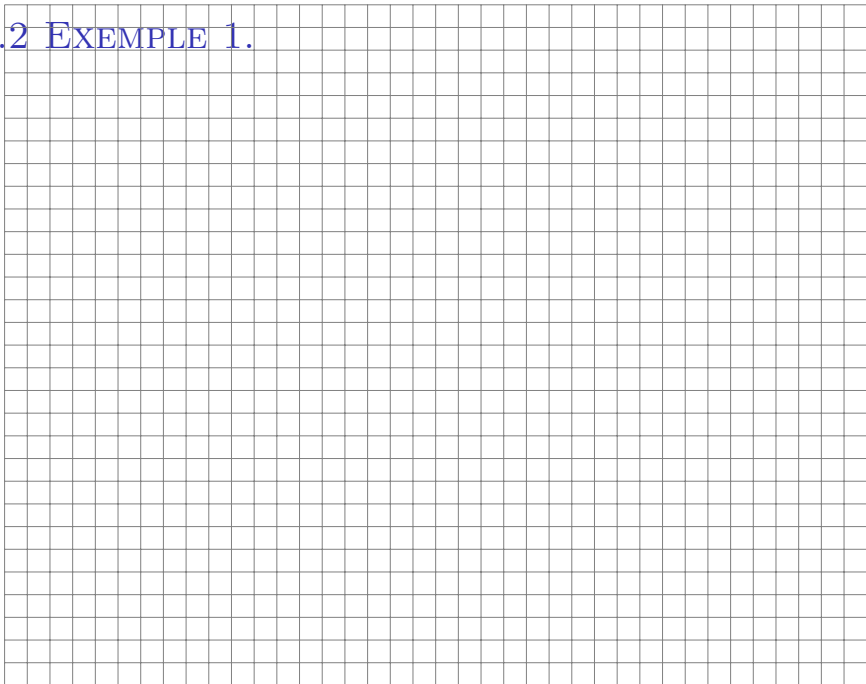
$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme p de degré ≤ 2 .

Nous allons

- ➊ calculer le noyau,
- ➋ en déduire la dimension de l'image grâce au Théorème du rang, et
- ➌ interpréter ce résultat pour conclure que deux zéros d'une fonction polynomiale de degré ≤ 2 déterminent le polynôme en question à un facteur près.

4.6.2 EXAMPLE 1.



4.6.2 EXEMPLE, SUITE

Considérons l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

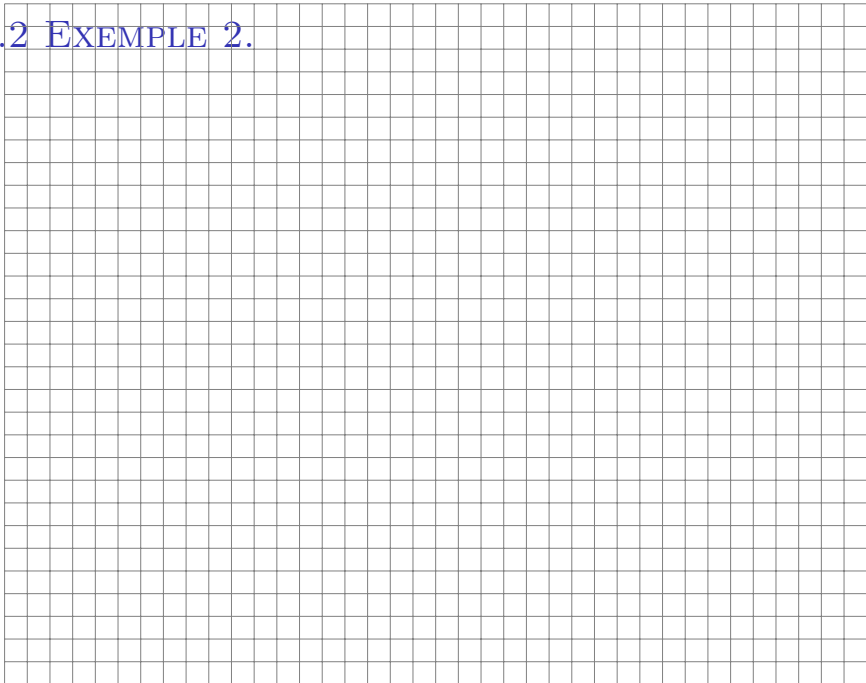
$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme p de degré ≤ 2 .

Nous allons

- ❶ calculer le noyau,
- ❷ en déduire que T est surjective grâce au Théorème du rang, et
- ❸ interpréter ce résultat pour conclure que trois points du graphe d'une fonction polynomiale de degré ≤ 2 déterminent uniquement le polynôme en question.

4.6.2 EXAMPLE 2.



4.6.3 CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ

THÉORÈME

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

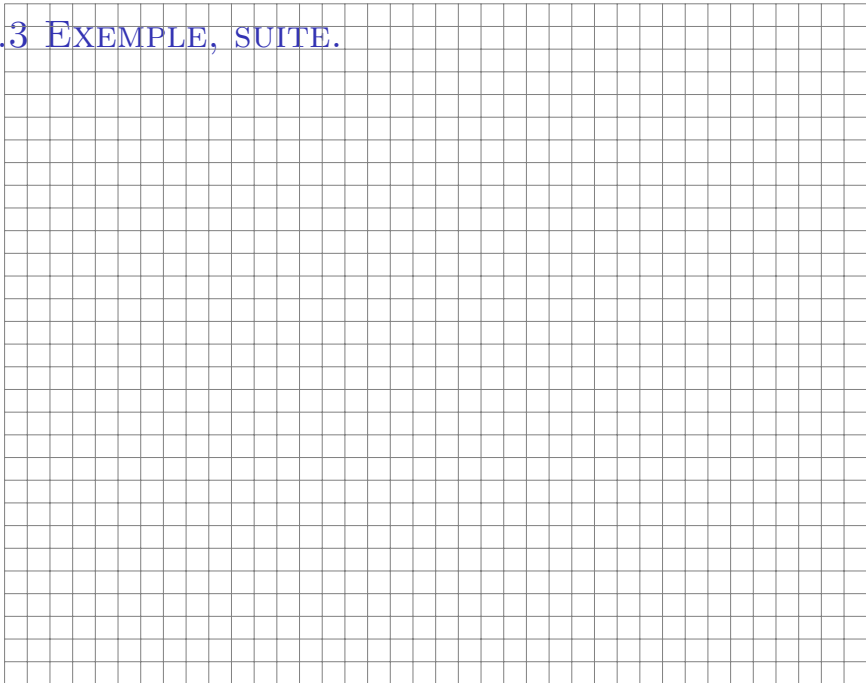
- (A) La matrice A est inversible.
- (M) Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- (N) $\text{Im} A = \mathbb{R}^n$.
- (O) $\dim \text{Im } A = n$.
- (P) $\text{rang } A = n$
- (Q) $\text{Ker } A = \{0\}$
- (R) $\dim \text{Ker } A = 0$.

4.6.3 EXEMPLE

Pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice A suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

4.6.3 EXEMPLE, SUITE.



5.4.1 UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soit W le sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures.

En fait $W = \text{Vect}\{e_{11}, e_{12}, e_{22}\}$ et $\mathcal{B} = (e_{11}, e_{12}, e_{22})$ est une base de W .

On considère $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow W$ l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p(-1) \\ 0 & p(2) \end{pmatrix}$$

En choisissant la base canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2)$ on identifie $\mathbb{P}_2$ avec $\mathbb{R}^3$ et en choisissant la base ci-dessus de W on identifie W avec $\mathbb{R}^3$ également.

5.4.1 LES IMAGES DES VECTEURS DE BASE

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 = (1)_{can} \text{ et } 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = W_1 \text{ et } (W_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

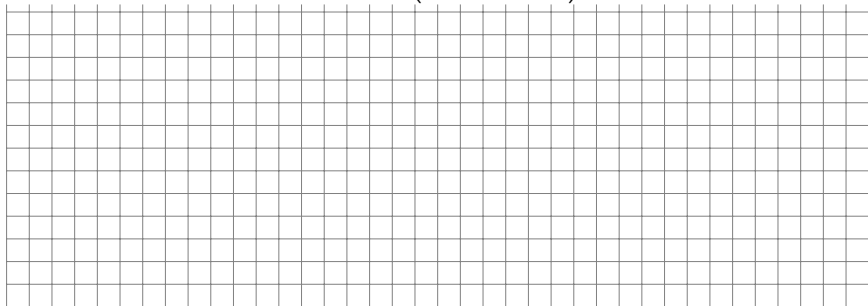
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 = (t)_{can} \text{ et } t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = W_2 \text{ et } (W_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3 = (t^2)_{can} \text{ et } t^2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = W_3 \text{ et } (W_3)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5.4.1 LA MATRICE DE T

On représente T , après avoir choisi les bases $\mathcal{C}an$ de $\mathbb{P}_2$ et $\mathcal{B}$ de W , par la matrice dont les colonnes sont les images des vecteurs de la base $\mathcal{C}an$ exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = (T)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$



5.4.2 LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

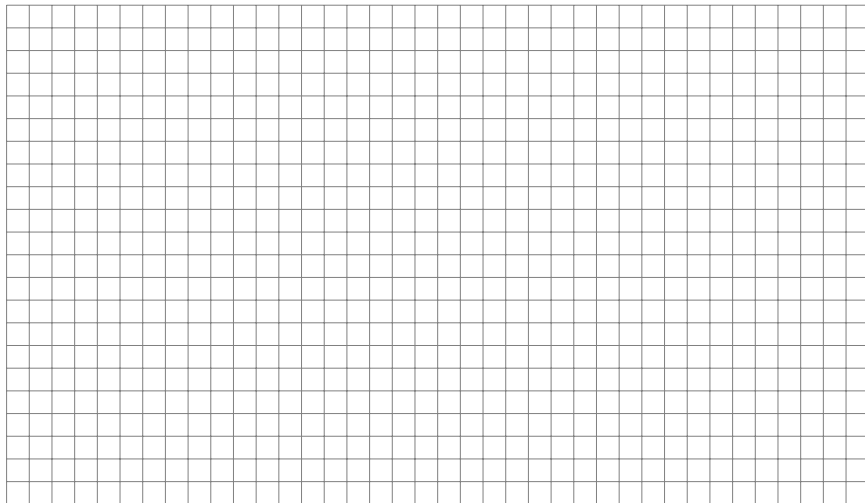
On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

5.4.2 ILLUSTRATION.

Cette formule dit en fait que les deux chemins possibles pour aller d'un coin à l'autre du carré suivant donnent le même résultat :



5.4.2 PREUVE.



5.4.2 UN CAS CONNU

REMARQUE

Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ et que les bases choisies sont les bases canoniques, la matrice d'une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la matrice de T au sens du chapitre 1.9.

En effet $(T)_{\mathcal{C}_{an}}^{\mathcal{C}_{an}}$ est par définition la matrice dont les colonnes sont les images $T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)$, exprimées en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{C}_{an}$. Or, les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^m$ par rapport à la base canonique sont simplement ses coefficients.

5.4.2 EXEMPLE : UNE ROTATION

Soit $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\pi/2$.

Nous connaissons $(r)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais, si on choisit la base canonique pour l'espace vectoriel de départ $\mathbb{R}^2$, et à l'arrivée la nouvelle base $\mathcal{C}$ donnée par

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{r(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 \quad \text{et} \quad r(\vec{e}_2) = \vec{f}_2}$$

$$(r)_{\mathcal{C}an}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

5.4.2 CONCLUSION

On perd trop d'information lorsqu'on permet de choisir des bases arbitraires au départ et à l'arrivée.

FAIT

La seule information qui reste est le **rang** de l'application linéaire : deux matrices de même taille et de même rang représentent la même application linéaire.

DÉCISION

Pour étudier des applications linéaires $T : V \rightarrow V$ nous choisirons une seule base de V , la même pour l'espace vectoriel de départ et d'arrivée.

But. Trouver la meilleure base pour comprendre T .

4.7.1 CHANGEMENT DE BASE

- V est un espace vectoriel,
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de V ,
- $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de V .

DÉFINITION

La matrice de **changement de base** de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ est la matrice $(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $n \times n$ dont les colonnes sont $(e_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (e_n)_{\mathcal{C}}$.

La matrice de changement de base est donc la matrice de l'application linéaire identité, mais pour des choix différents en général de base au départ et à l'arrivée. Ici $Id_V(e_i) = e_i$.

Question. Pourquoi cette matrice mérite-t-elle le nom de matrice de *changement de base*?

4.7.2 THÉORÈME DU CHANGEMENT DE BASE

La matrice de changement de base permet de calculer les coordonnées dans la **nouvelle base** $\mathcal{C}$ si on connaît celles dans l'**ancienne base** $\mathcal{B}$.

THÉORÈME

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

Preuve. Cela découle du résultat plus général démontré ci-dessus !

En effet

$$(Id_V)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Id_V(v))_{\mathcal{C}} = (v)_{\mathcal{C}}$$

4.7.2 EXAMPLE.

