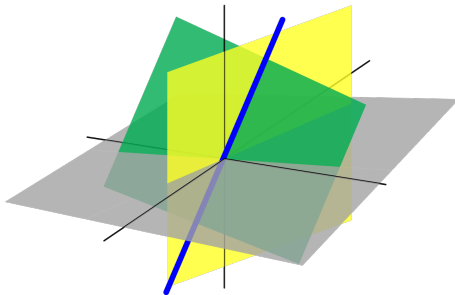


# ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 31 OCTOBRE

Jérôme Scherer



## 4.2.2 RAPPEL ET NOUVEAUTÉ : NOYAU ET IMAGE

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire.

### DÉFINITION

Le **noyau** de  $T$  est le sous-ensemble  $\text{Ker } T = \{v \in V \mid Tv = 0\}$ .

### DÉFINITION

L'**image** d'une application linéaire  $T : V \rightarrow W$  est le sous-ensemble  $\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$ .

### REMARQUE

- 1 Le concept de noyau généralise la notion de solution générale d'un système homogène.
- 2 Le concept d'image généralise la notion du sous-espace ColA engendré par les colonnes d'une matrice  $A$ .

## 4.2.2 UN AUTRE EXEMPLE.

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  l'application  $T(\vec{x}) = \det(A_n(\vec{x}))$  (le déterminant de la matrice  $A$  dont on a remplacé la dernière colonne par  $\vec{x}$ ). On appelle  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$  les  $(n-1)$  premières colonnes de  $A$ .

- ❶ Si  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$  sont liés, alors  $T(\vec{x}) = 0$  pour tout  $\vec{x}$ , si bien que le noyau de  $T$  est  $\mathbb{R}^n$ .
- ❷ Sinon,  $T(\vec{x}) = 0$  si et seulement si  $\vec{x}$  est linéairement dépendant de  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}$ , car sinon les  $n$  colonnes de  $A_n(\vec{x})$  sont libres et le déterminant est non nul. Ainsi  $\text{Ker } T = \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}\}$ .

### 4.2.3 LE NOYAU EST UN SOUS-ESPACE

**Exemple.** Soit  $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a - d \end{pmatrix}$$

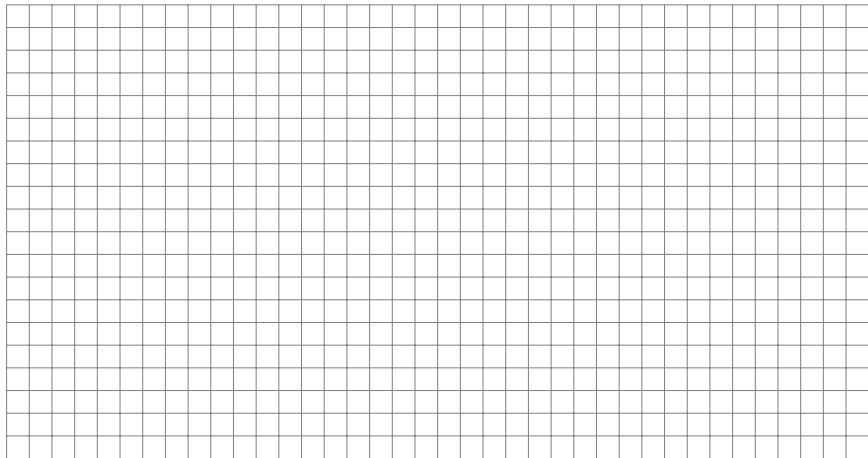
On vérifie que  $T$  est linéaire. Le noyau de  $T$  est un sous-ensemble de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ . Lequel ? C'est le sous-espace de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

#### THÉORÈME

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $\text{Ker } T$  est un sous-espace de  $V$ .

### 4.2.3 PREUVE.



#### CRITÈRE D'INJECTIVITÉ

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $T$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } T = \{0\}$ .

## 4.2.4 CALCUL DU NOYAU AVEC GAUSS

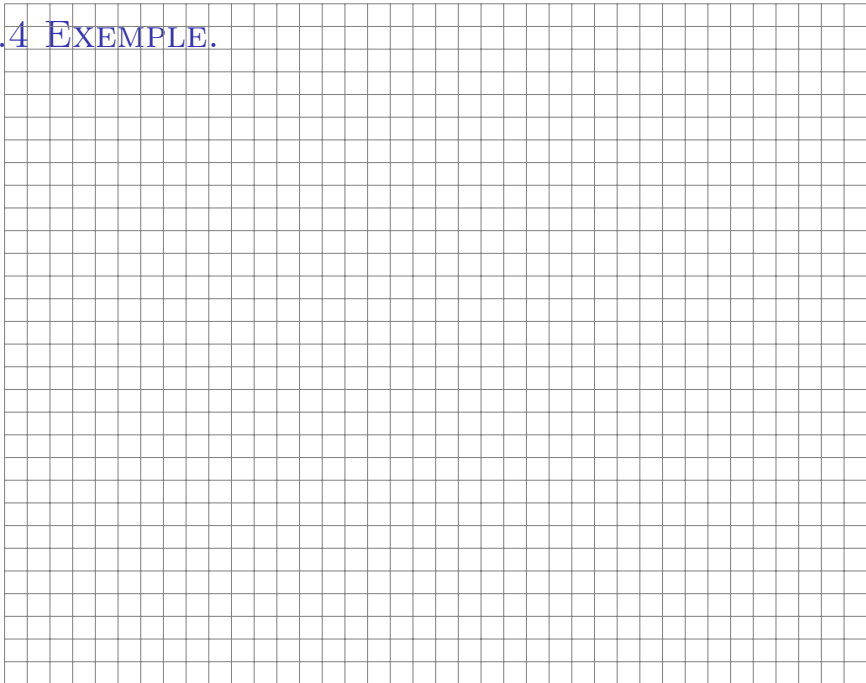
### REMARQUE

Lors du calcul d'un noyau on est souvent amené à résoudre un système d'équations homogène. La méthode de Gauss et la description de la solution générale sous forme paramétrique fournit alors un **système de générateurs linéairement indépendants**.

**Exemple.** On considère  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z - w \\ x - y - z + w \end{pmatrix}.$$

## 4.2.4 EXAMPLE.



## 4.2.5 L'IMAGE

### DÉFINITION

L'**image** d'une application linéaire  $T : V \rightarrow W$  est le sous-ensemble  $\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$ .

### REMARQUE

Le concept d'image généralise la notion du sous-espace  $\text{Col}A$  engendré par les colonnes d'une matrice  $A$ .

En effet, si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est représentée par une matrice  $A$  de taille  $m \times n$ , l'image de  $T$  est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de  $A$  puisque

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

On parle alors de l'**image de  $A$**  que l'on note  $\text{Im}A$ .

## 4.2.5 EXEMPLE

Considérons un exemple du type de ceux que nous avons étudié dans le Chapitre 1.

**Exemple.** Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + c \\ -a - c \\ b + 2a + 2c \\ -b \end{pmatrix}$$

On voit que  $T$  est linéaire puisque  $T$  est représentée par une matrice.

Les colonnes de cette matrice sont les images des vecteurs de la base canonique.

## 4.2.5 EXEMPLE, SUITE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent l'image de  $T$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^4$ . Lequel ?

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 4.2.6 L'IMAGE EST UN SOUS-ESPACE

### THÉORÈME

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $\text{Im } T$  est un sous-espace de  $W$ .

### REMARQUE

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Alors  $\text{Ker } T$  est un sous-espace de  $V$ , mais  $\text{Im } T$  est un sous-espace de  $W$ .

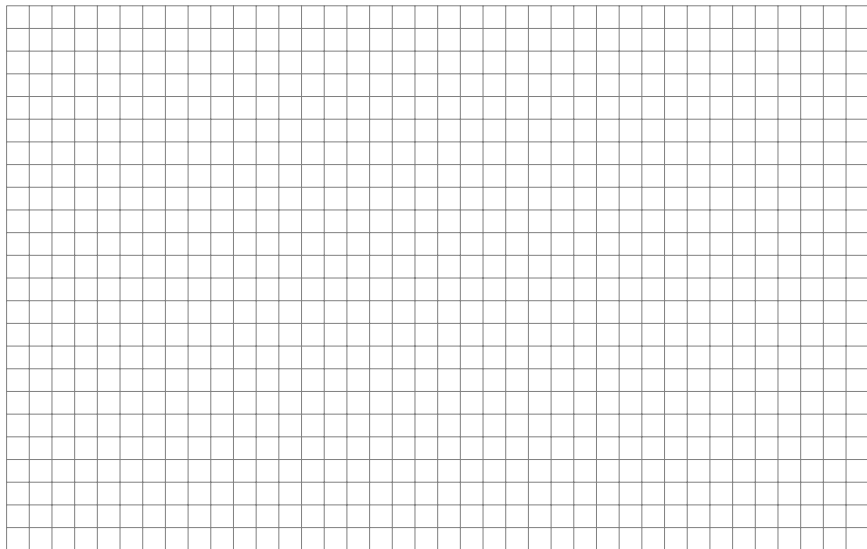
**Preuve.** On voit d'abord que  $0 = T(0)$  appartient à l'image. Il reste à montrer la stabilité de la somme et de l'action. Traitons le cas de la somme. Soient donc  $w, w'$  deux vecteurs de  $\text{Im } T$ . Nous devons montrer que  $w + w'$  aussi appartient à  $\text{Im } T$ .

## 4.2.6 SUITE.



## 4.2.6 EXAMPLE.

Soit  $D: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$  la dérivation,  $D(p) = p'$ .



## 4.2.7 MÉTHODE DE CALCUL

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire, représentée par une matrice  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

- 1 Pour calculer le **noyau** de  $T$  on échelonne et réduit la matrice  $A$  selon les **lignes**.
- 2 Pour calculer l'**image** de  $T$  on ne garde que les **colonnes-pivot**.  
Si nécessaire on échelonne et réduit  $A$  selon les **colonnes**.

### ESPACE-COLONNE

On appelle parfois **espace-colonne** le sous-espace  $\text{Col}A$  engendré par les colonnes de  $A$ . Il s'agit donc de  $\text{Im}A$  !

## 4.2.7 EXPLICATION

Soit  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , et  $B$  la matrice échelonnée associée.

Si une colonne n'a pas de pivot, le système  $A\vec{x} = \vec{0}$  a une infinité de solutions (les mêmes que  $B\vec{x} = \vec{0}$ ), on peut écrire

$$x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

La colonne sans pivot est combinaison linéaire des autres colonnes.

### IMPORTANT

Les colonnes de  $A$  vérifient les mêmes relations de dépendance linéaire que celles de  $B$ .

On peut donc enlever une telle colonne pour engendrer  $\text{Col}A = \text{Im}A$ . Les  $k$  colonnes-pivot restantes **de**  $A$  sont libres puisque la matrice  $m \times k$  formée de ces  $k$  colonnes a  $k$  pivots.

## 4.2.7 EXEMPLE

Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Nous voulons calculer le noyau et l'image de  $A$ , c'est-à-dire le noyau et l'image de l'application linéaire  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  donnée par  $T\vec{x} = A\vec{x}$ .

Nous utilisons donc la méthode Gauss, pour simultanément construire une base du noyau de  $A$  et extraire une base de l'espace-colonnes  $\text{Col}A = \text{Im}A$ .

## 4.2.7 SUITE.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4.2.8 EXEMPLE

Soit  $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  défini par

$$T(A) = A + A^T$$

Nous savons que  $T$  est linéaire puisque

$$\begin{aligned}(1) \quad T(A + B) &= (A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = \\ &= A + A^T + B + B^T = T(A) + T(B)\end{aligned}$$

De même, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$(2) \quad T(\alpha A) = \alpha A + (\alpha A)^T = \alpha A + \alpha A^T = \alpha(A + A^T) = \alpha T(A)$$

## 4.2.8 QUEL EST LE NOYAU DE $T$ ?

Il s'agit des matrices  $A$  telles que  $A + A^T = 0$ . En “dollars” si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$T(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$$

Cette matrice est la matrice nulle si et seulement si  $a = d = 0$  et  $b + c = 0$ . En d'autres termes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

## 4.2.8 QUELLE EST L'IMAGE DE $T$ ?

L'image de  $T$  est constituée de toutes les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b+c) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a, b, c, d$  peuvent prendre des valeurs arbitraires. Ainsi

$$\text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 5.4.0. LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- $V$  est un espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,
- $W$  est un espace vectoriel muni d'une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ ,
- $T : V \rightarrow W$  est une application linéaire.

### DÉFINITION

La matrice  $A$  de  $T$  (pour ce choix de bases) est la matrice  $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  de taille  $m \times n$  dont les colonnes sont  $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$ .

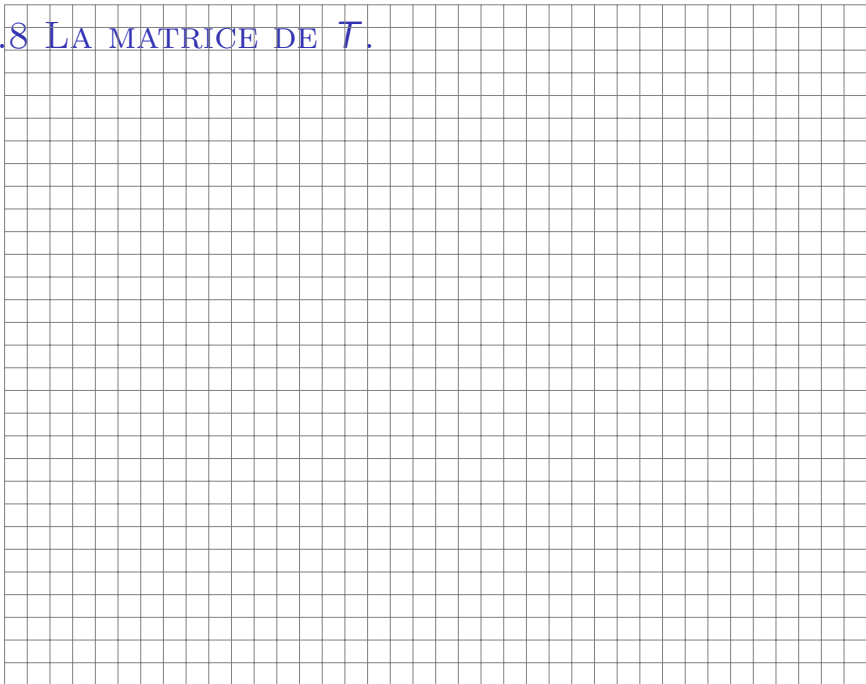
### SLOGAN

On place dans les **colonnes** de  $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  exprimées en coordonnées dans la base  $\mathcal{C}$ .

### PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

## 4.2.8 LA MATRICE DE $T$ .



## 4.2.9 CRITÈRE D'INJECTIVITÉ, RAPPEL

Le critère d'injectivité d'une application linéaire permet de ramener la démonstration de l'injectivité au calcul du noyau. Le noyau mesure donc le défaut d'injectivité.

### PROPOSITION

Une application linéaire  $T : V \rightarrow W$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } T = \{0\}$ .

### 4.6.1 ESPACES-LIGNES : LGNA

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de taille  $m \times n$ . On note  $A \sim B$  quand elles sont équivalentes selon les lignes.

#### THÉORÈME

Si  $A \sim B$ , alors les lignes de  $A$  et  $B$  engendrent le même sous-espace de  $\mathbb{R}^n$ .

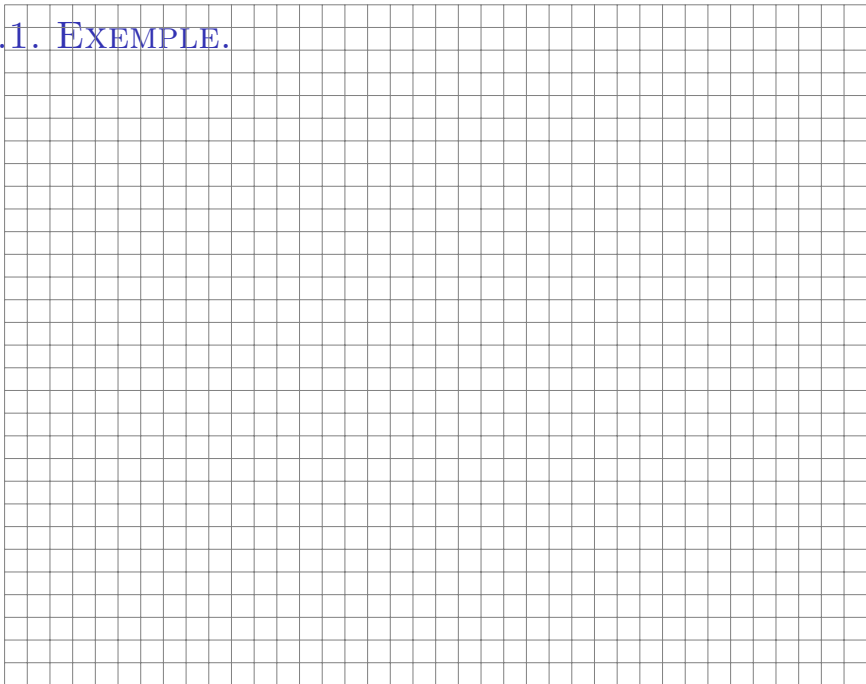
**Pourquoi ?** Les opérations élémentaires produisent de nouvelles lignes qui sont combinaisons linéaires des précédentes.

#### THÉORÈME

Les lignes d'une forme échelonnée de  $A$  forment une base du sous-espace engendré par les lignes de  $A$ .

**Pourquoi ?** Aucune ligne non nulle de la forme échelonnée ne peut être combinaison linéaire des autres (à cause de son pivot).

## 4.6.1. EXAMPLE.



## 4.6.1. SUITE.



## 4.6.1 ESPACES-COLONNES : $\text{Col}A$

Soit  $A$  une matrices de taille  $m \times n$ .

### THÉORÈME

Les colonnes pivots de  $A$  forment une base de  $\text{Col}A = \text{Im } A$ .

**Pourquoi ?** Si une colonne de  $A$  est combinaison linéaire d'autres colonnes, alors la même combinaison linéaire se retrouve pour les colonnes d'une matrice  $B \sim A$ .

Si  $B$  est une forme échelonnée de  $A$ , alors les colonnes-pivots sont libres et les autres colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes pivots.

Il en va donc de même pour les colonnes de  $A$ .



## 4.6.1 REMARQUE IMPORTANTE

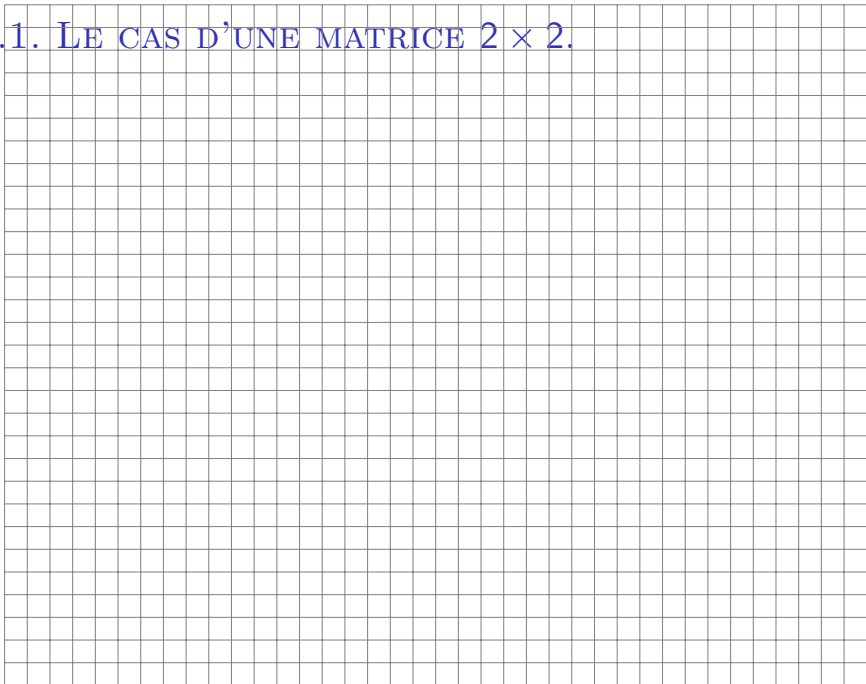
Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .

### THÉORÈME

$$\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$$

- 1 Le nombre de lignes linéairement indépendantes est égal au nombre de lignes contenant un pivot.
- 2 Le nombre de colonnes linéairement indépendantes est égal au nombre de colonnes contenant un pivot.
- 3 En résumé,  $\dim \text{Col}A = \dim \text{Lgn}A$  car les deux dimensions coïncident avec le nombre de pivots !

#### 4.6.1. LE CAS D'UNE MATRICE $2 \times 2$ .



## 4.6.2 LE RANG

Soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire entre espaces vectoriels de dimensions finies.

### DÉFINITION

Le **rang** de  $T$  est la dimension de l'image de  $T$  :

$$\text{rang } T = \dim \text{Im } T.$$

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$ , représentant une application linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

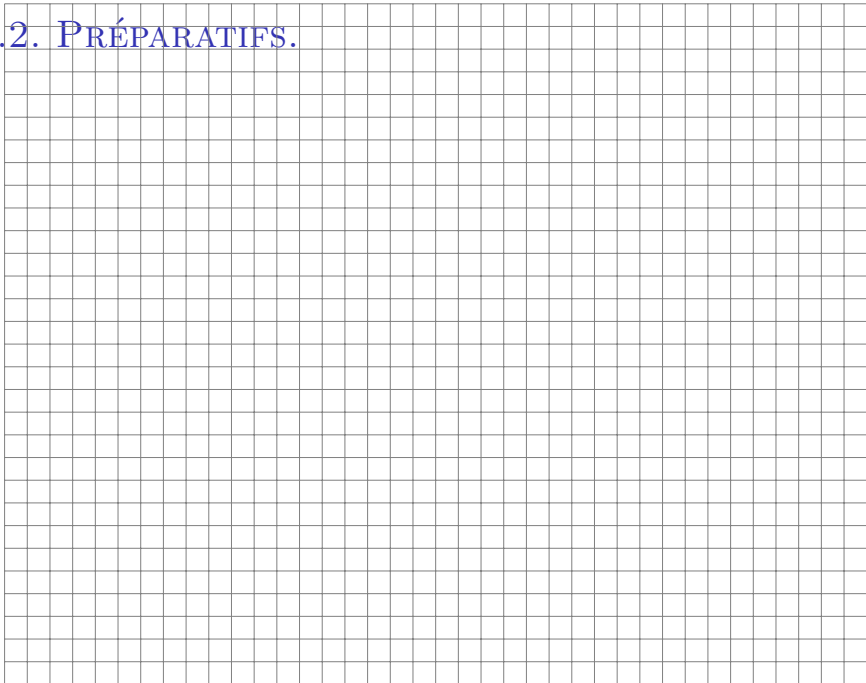
### DÉFINITION

Le **rang** de  $A$  est la dimension de l'image de  $A$  :  $\text{rang } A = \dim \text{Im } A$ .

### THÉORÈME DU RANG

$$\text{rang } T + \dim \text{Ker } T = \dim V$$

## 4.6.2. PRÉPARATIFS.



## 4.6.2 LE THÉORÈME DU RANG

### THÉORÈME

$$\text{rang } T + \dim \text{Ker } T = \dim V$$

- ❶ Grâce aux coordonnées on identifie  $V$  avec  $\mathbb{R}^n$  et  $W$  avec  $\mathbb{R}^m$ .
- ❷ Ainsi on identifie  $T$  avec une application linéaire  $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
- ❸ Celle-ci est donnée par multiplication matricielle  
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} = S(\vec{x}).$$
- ❹  $\dim \text{Ker } A =$  nombre de colonnes sans pivot
- ❺  $\dim \text{Im } A = \text{rang } A =$  nombre de colonnes-pivot
- ❻ nombre de colonnes-pivot + colonnes sans pivot =  $n$ . □

## 5.4.0. EXAMPLE.

Soit  $D: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$  la dérivation,  $D(p) = p'$ .

