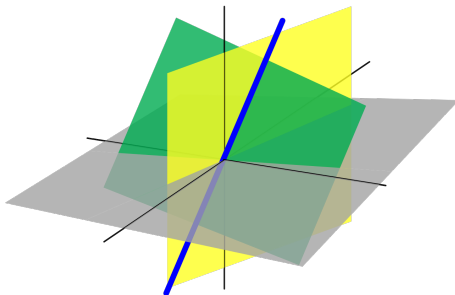


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 29 OCTOBRE

Jérôme Scherer



4.5.2 LA DIMENSION, RAPPEL

THÉORÈME

Deux bases de V ont le même nombre d'éléments.

DÉFINITION

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. La **dimension** de V est n . On note $\dim V = n$.

- ❶ $\dim \mathbb{R}^n = n$
- ❷ $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$
- ❸ $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$

Exemple. La dimension de $\mathbb{R}$ est 1. Il y a ici un seul sous-espace de dimension zéro, c'est $\{0\}$, et un seul sous-espace de dimension 1, c'est $\mathbb{R}$.

4.5.3 COMPLÉMENTS SUR LA DIMENSION

DIMENSION ZÉRO

Un espace vectoriel V est de **dimension nulle** si et seulement si $V = \{0\}$.

En effet 0 est un vecteur linéairement dépendant, il ne peut donc faire partie d'aucune base ! De plus notre convention était que $\text{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$. Ainsi l'ensemble vide est une famille libre de générateurs de $\{0\}$.

PROPOSITION

Soit V un espace vectoriel de dimension n . Si W est un sous-espace de V , alors $\dim W \leq n$.

Preuve. Toute famille de plus de n vecteurs de V est liée. |

4.5.4 LA DIMENSION ET LES SOUS-ESPACES DE $\mathbb{R}^3$

Il y a dans $\mathbb{R}^3$:

- ❶ Un seul sous-espace de dimension zéro $\{\vec{0}\}$
- ❷ Une infinité de sous-espaces de dimension 1 : droites $\text{Vect}\{\vec{u}\}$ passant par l'origine
- ❸ Une infinité de sous-espaces de dimension 2 : plans $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ passant par l'origine
- ❹ Un seul sous-espace de dimension trois $\mathbb{R}^3$

Car trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

4.5.5 THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE

On peut extraire une base d'une famille de générateurs et on peut compléter une famille libre en une base !

THÉORÈME

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_k\}$ une famille libre de vecteurs de V . Il existe alors des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de V .

Preuve. Si $(e_1, \dots, e_k)$ forme déjà une base de V , on s'arrête là. Sinon il existe un vecteur e_{k+1} qui n'est pas dans $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$. J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

4.5.5 FIN DE LA PREUVE

J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

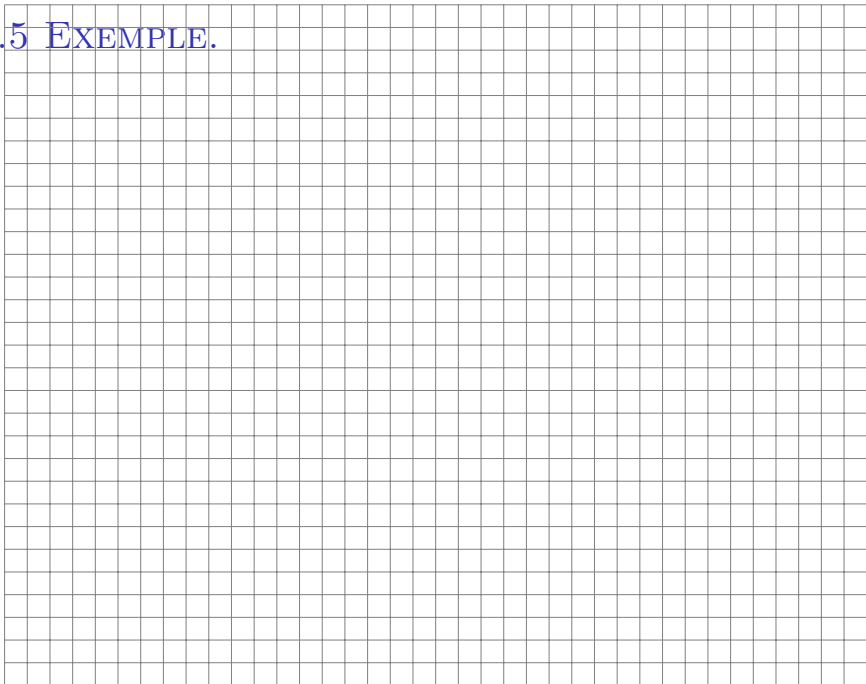
- En effet si $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ car e_{k+1} n'est pas combinaison linéaire des autres e_j par construction.
- Ainsi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$.
- Comme la famille de départ est libre, tous les α_i sont nuls.

On peut donc ajouter e_{k+1} à la famille $\{e_1, \dots, e_k\}$.

On continue ce processus inductif jusqu'à compter n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.



4.5.5 EXAMPLE.



4.5.6 DEUX POINTS DU VUE SUR LES BASES

Soit V un espace vectoriel de dimension n .

CRITÈRES

- ① Une famille libre $\mathcal{L}$ de n vecteurs forme une base de V .
- ② Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de n vecteurs forme une base de V .

Preuve. On peut toujours compléter une famille libre en une base et extraire une base d'une famille génératrice.

Or, si on ajoute un vecteur à $\mathcal{L}$, elle devient liée ; et si on enlève un vecteur de $\mathcal{G}$ elle ne peut plus engendrer V puisque toute base est formée de n vecteurs. □

4.5.6 DEUX POINTS DU VUE SUR LES BASES

Soit V un espace vectoriel de dimension n . Une **base** est une famille ordonnée de générateurs libre de V . Nous avons vu que toute base est composée du même nombre n de vecteurs.

CRITÈRES

- ❶ Une famille libre $\mathcal{L}$ de n vecteurs forme une base de V .
- ❷ Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de n vecteurs forme une base de V .

La raison en est que si on ajoute un vecteur à n vecteurs libres, la famille devient liée et si on enlève un vecteur de n générateurs, la famille n'engendre plus V .

Une base est donc une famille ordonnée libre *maximale* ou une famille de générateurs *minimale*.

4.5.7. COMMENT EXTRAIRE UNE BASE

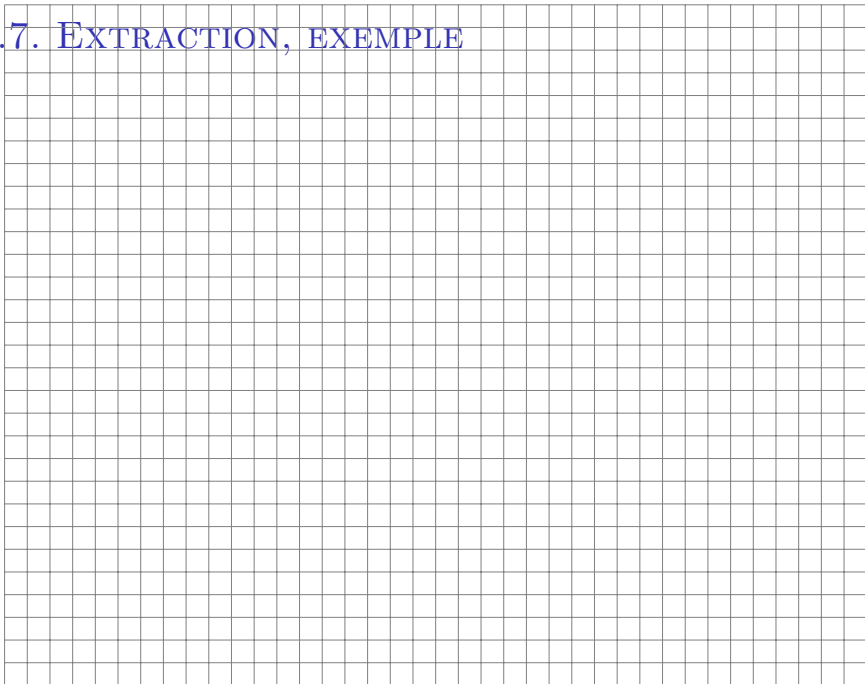
Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une famille génératrice de V et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V . Pour extraire une base de $\mathcal{F}$:

- ➊ Trouver les composantes des f_j dans la base $\mathcal{B}$.
- ➋ Ecrire la matrice F dont les colonnes sont les $(f_j)_{\mathcal{B}}$.
- ➌ Echelonner F .
- ➍ Ne garder que les n colonnes pivots de F .

Exemple. Extraire de la famille

$\{1 - t, -1 + t^2, t^2 - t, 1 + t, t^2 + 1\}$ une base de $\mathbb{P}_2$.

4.5.7. EXTRACTION, EXEMPLE



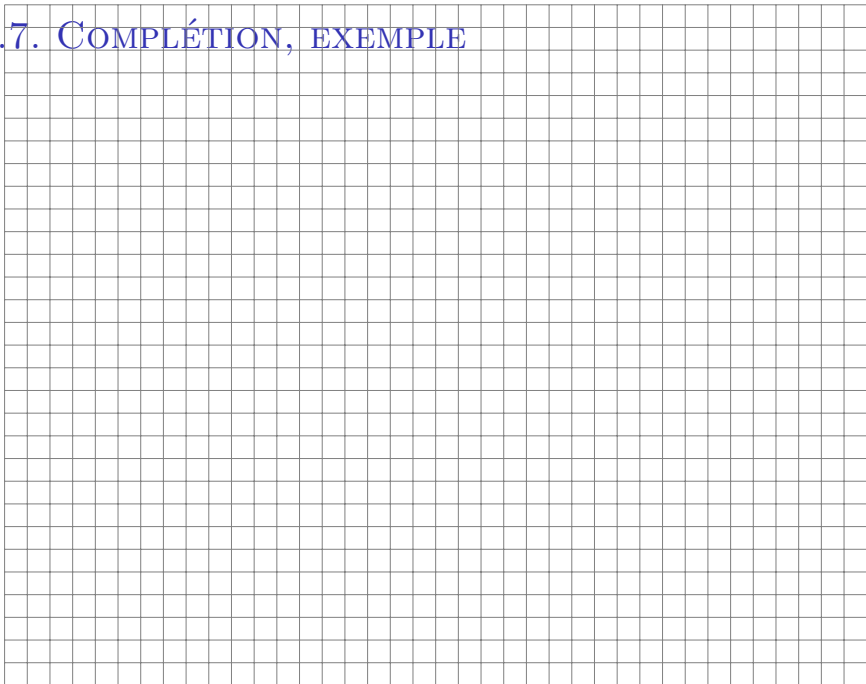
4.5.7 COMMENT COMPLÉTER UNE BASE

Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ une famille libre de V dont on a une base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour compléter $\mathcal{F}$ en une base :

- 1 Trouver les composantes des f_j dans la base $\mathcal{B}$.
- 2 Ecrire la matrice F dont les **lignes** sont les $(f_j)_{\mathcal{B}}$.
- 3 Echelonner F .
- 4 Ajouter les vecteurs e_i pour les valeurs de i qui ne sont pas des colonnes pivot.

Exemple. Compléter la famille $\{\vec{e}_2 - \vec{e}_1, \vec{e}_3 - \vec{e}_1, \vec{e}_4 - \vec{e}_1\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

4.5.7. COMPLÉTION, EXEMPLE



4.5.7. COMPLÉTION, FIN



1.8 APPLICATIONS LINÉAIRES : RAPPELS

Soient V et W deux espaces vectoriels.

DÉFINITION

Une application $T : V \rightarrow W$ est **linéaire** si

- ❶ $T(u + v) = Tu + Tv$ pour tous $u, v \in V$;
- ❷ $T(\alpha v) = \alpha Tv$ pour tous $v \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemples.

- ❶ Soit A une matrice $m \times n$. Alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$T\vec{x} = A\vec{x}$$

est linéaire

4.2.1 LINÉARITÉ : PLUS D'EXEMPLES

- ② La dérivée $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des applications ∞ -dérivables est linéaire. Ici $D(f) = f'$.

En effet $(f + g)' = f' + g'$ et $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f'$.

- ③ La dérivée $D : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}$ est linéaire. Ici $D(p) = p'$. En particulier $D(t^k) = kt^{k-1}$.

On peut prendre cela comme définition et “étendre par linéarité”, c'est-à-dire définir

$D(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)$ comme

$$n \cdot a_n t^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + a_1$$

Remarque : Comme $D(1) = 0$, la dérivation n'est pas injective.

4.2.1 LINÉARITÉ : CONTRE-EXEMPLE

L'application $C : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ définie par

$$p \mapsto p^2$$

n'est pas linéaire. En effet on voit par exemple que

$$C(2t) = (2t)^2 = 4t^2 \neq 2t^2 = 2C(t)$$

INTUITION

Souvent, les formules qui définissent une application linéaire sont données par des combinaisons linéaires de coefficients.

Exemple : Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $1 \leq i \leq n$. Alors l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $\vec{x}$ sur $\det(A_i(\vec{x}))$ est linéaire.

4.2.2 LE NOYAU

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

DÉFINITION

Le **noyau** de T est le sous-ensemble $\text{Ker } T = \{v \in V \mid Tv = 0\}$.

Etymologie. En allemand le mot “noyau” se dit “Kern”.

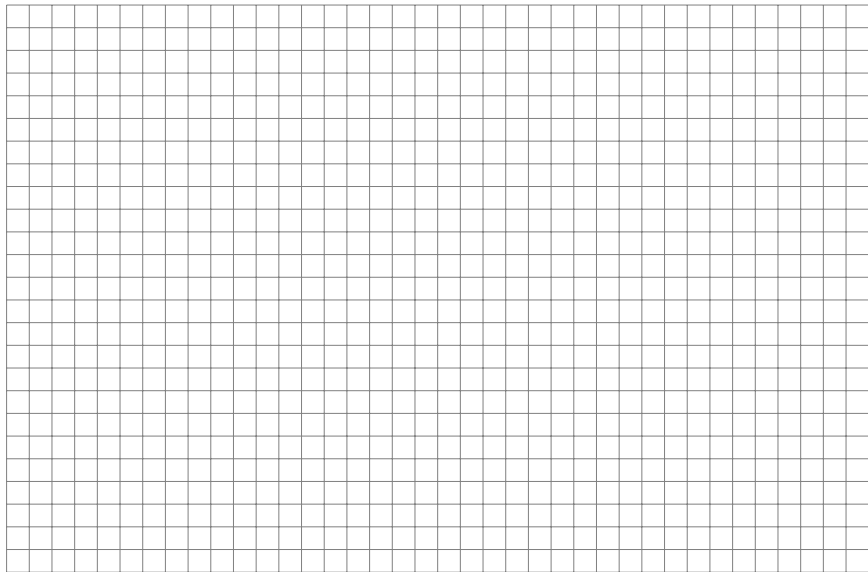
REMARQUE

Le concept de noyau généralise la notion de solution générale d'un système homogène.

En effet, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est représentée par une matrice A de taille $m \times n$, le noyau de T est l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $A\vec{x} = \vec{0}$. On parle alors du **noyau de A** , noté $\text{Ker } A$.

4.2.2 EXEMPLE.

Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur l'axe $x = y$.



4.2.3 LE NOYAU EST UN SOUS-ESPACE

Exemple. Soit $T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a - d \end{pmatrix}$$

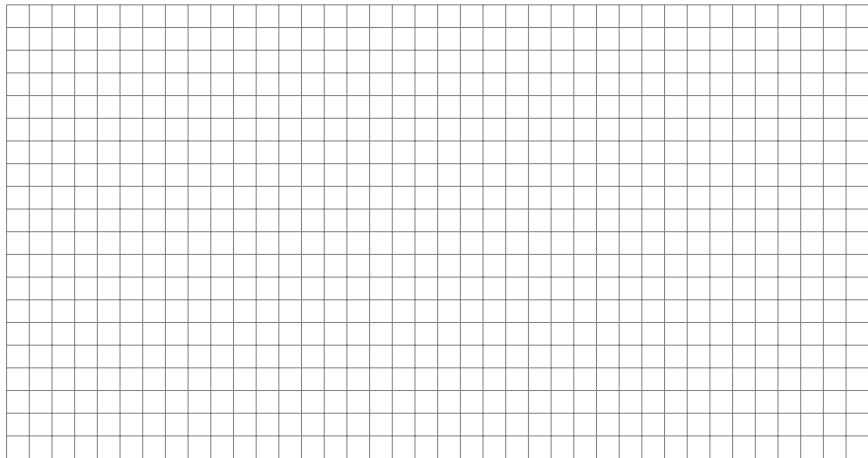
On vérifie que T est linéaire. Le noyau de T est un sous-ensemble de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Lequel ? C'est le sous-espace de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\text{Ker } T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

THÉORÈME

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Ker } T$ est un sous-espace de V .

4.2.3 PREUVE.



CRITÈRE D'INJECTIVITÉ

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors T est injective si et seulement si $\text{Ker } T = \{0\}$.

4.2.4 CALCUL DU NOYAU AVEC GAUSS

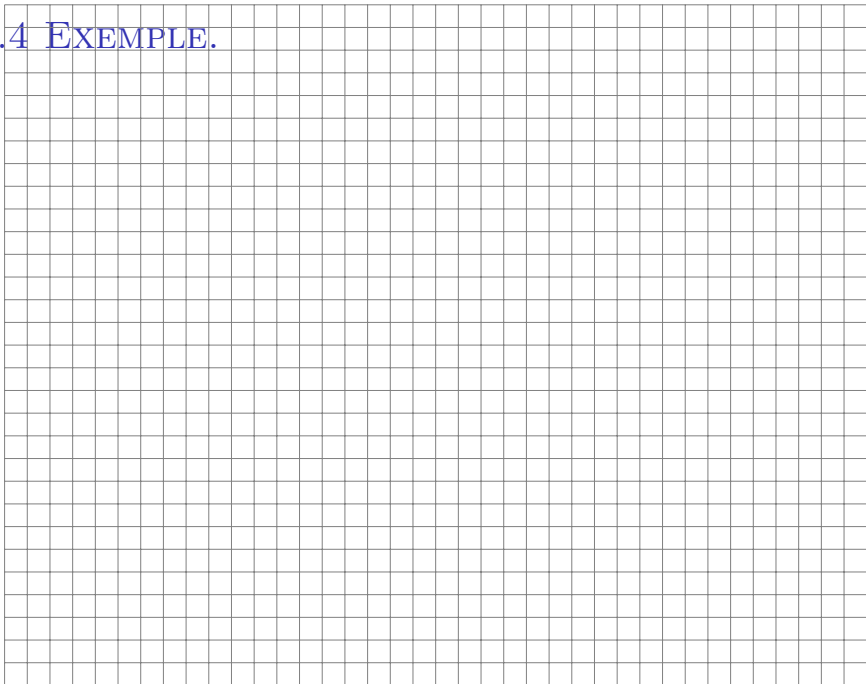
REMARQUE

Lors du calcul d'un noyau on est souvent amené à résoudre un système d'équations homogène. La méthode de Gauss et la description de la solution générale sous forme paramétrique fournit alors un **système de générateurs linéairement indépendants**.

Exemple. On considère $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z - w \\ x - y - z + w \end{pmatrix}.$$

4.2.4 EXAMPLE.



4.2.5 L'IMAGE

DÉFINITION

L'**image** d'une application linéaire $T : V \rightarrow W$ est le sous-ensemble $\text{Im } T = \{w \in W \mid \text{il existe } v \in V \text{ tel que } Tv = w\}$.

REMARQUE

Le concept d'image généralise la notion du sous-espace $\text{Col}A$ engendré par les colonnes d'une matrice A .

En effet, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est représentée par une matrice A de taille $m \times n$, l'image de T est alors l'ensemble des combinaisons linéaires des colonnes de A puisque

$$A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

On parle alors de l'**image de A** que l'on note $\text{Im}A$.

4.2.5 EXEMPLE

Considérons un exemple du type de ceux que nous avons étudié dans le Chapitre 1.

Exemple. Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + c \\ -a - c \\ b + 2a + 2c \\ -b \end{pmatrix}$$

On voit que T est linéaire puisque T est représentée par une matrice.

Les colonnes de cette matrice sont les images des vecteurs de la base canonique.

4.2.5 EXEMPLE, SUITE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent l'image de T est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$. Lequel ?

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

4.2.6 L'IMAGE EST UN SOUS-ESPACE

THÉORÈME

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Im } T$ est un sous-espace de W .

REMARQUE

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors $\text{Ker } T$ est un sous-espace de V , mais $\text{Im } T$ est un sous-espace de W .

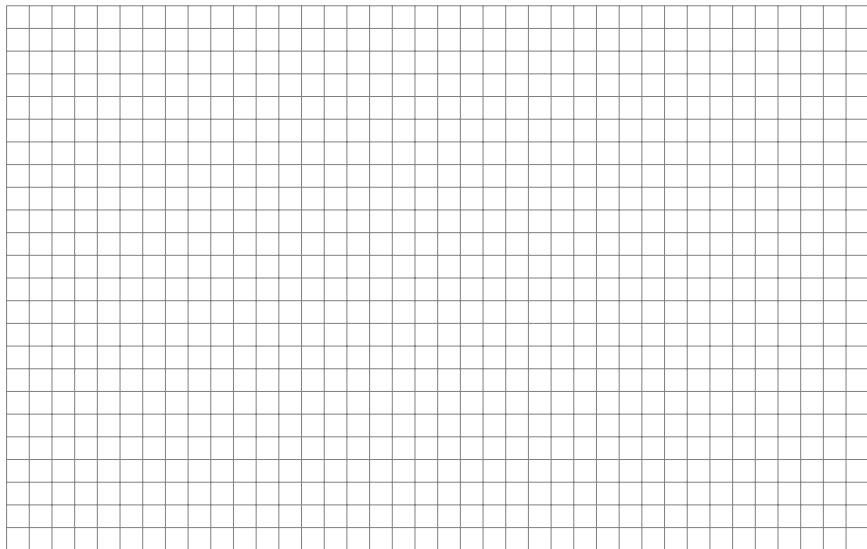
Preuve. On voit d'abord que $0 = T(0)$ appartient à l'image. Il reste à montrer la stabilité de la somme et de l'action. Traitons le cas de la somme. Soient donc w, w' deux vecteurs de $\text{Im } T$. Nous devons montrer que $w + w'$ aussi appartient à $\text{Im } T$.

4.2.6 SUITE.



4.2.6 EXAMPLE.

Soit $D: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ la dérivation, $D(p) = p'$.



MÉTHODE DE CALCUL

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire, représentée par une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

- 1 Pour calculer le **noyau** de T on échelonne et réduit la matrice A selon les **lignes**.
- 2 Pour calculer l'**image** de T on ne garde que les **colonnes-pivot**.
Si nécessaire on échelonne et réduit A selon les **colonnes**.

ESPACE-COLONNE

On appelle parfois **espace-colonne** le sous-espace $\text{Col}A$ engendré par les colonnes de A . Il s'agit donc de $\text{Im}A$!

5.4.0. LA MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

- V est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$,
- W est un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$,
- $T : V \rightarrow W$ est une application linéaire.

DÉFINITION

La matrice A de T (pour ce choix de bases) est la matrice $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ de taille $m \times n$ dont les colonnes sont $(Te_1)_{\mathcal{C}}, \dots, (Te_n)_{\mathcal{C}}$.

SLOGAN

On place dans les **colonnes** de $(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimées en coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

PROPOSITION

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(v)_{\mathcal{B}} = (Tv)_{\mathcal{C}}.$$

5.4.0. EXAMPLE.

Soit $D: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ la dérivation, $D(p) = p'$.

