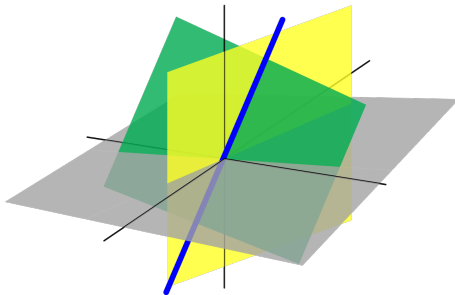


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 17 OCTOBRE

Jérôme Scherer



4.3.1 PARTIES LIBRES ET BASES : RAPPELS

Soit W un sous-espace vectoriel de V .

- ❶ Les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de W sont **linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

- ❷ On dit que l'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une **partie libre** de W .

DÉFINITION

Une famille **ordonnée** de vecteurs $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ de W est une **base** de W si c'est une partie libre qui engendre W .

4.3.2 BASES CANONIQUES

- ❶ Le cas de $\mathbb{R}^n$. La base *canonique* est

$$\mathcal{C}an = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

C'est une base car nous avons vu que tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\vec{e}_i$.

- ❷ Le cas de $\mathbb{P}_n$. La base *canonique* est

$$\mathcal{C}an = (1, t, t^2, \dots, t^n)$$

Ici aussi tout vecteur de $\mathbb{P}_n$, i.e. tout polynôme de degré $\leq n$ s'écrit comme combinaison linéaire de ces monômes t^i , car un tel polynôme est de la forme $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n$.

4.3.2 BASES CANONIQUES, SUITE

(3) Le cas de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. La base *canonique* est

$$\mathcal{Can} = (e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn})$$

où e_{ij} est la matrice constituée de zéros, sauf le coefficients (i, j) qui vaut 1. Dans $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, la base canonique est donnée **dans cet ordre** :

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.3 EXEMPLE

Soit W le plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$.

L'inconnue x est principale, les inconnues y, z sont secondaires et seront nos paramètres.

$$x = -y - z$$

Les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de W .

REMARQUE

Il n'y a pas de base canonique dans W . Nous avons fait des choix de paramètres !

EXAMPLE.



4.3.4 THÉORÈME DE LA BASE EXTRAITE

Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ une famille de vecteurs qui engendrent V .

THÉORÈME

- a Si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en supprimant v_i engendre encore V .
- b Si $V \neq \{0\}$, il existe une sous-famille de $\{v_1, \dots, v_k\}$ qui forme une base de V .

Preuve. (A) Pour $i = k$. On suppose que

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$$

Puisque la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V , tout vecteur $v \in V$ est une combinaison linéaire des v_i .

PREUVE, SUITE

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) \\ &= (\beta_1 + \beta_k \alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) v_{k-1} \end{aligned}$$

Nous avons montré que v est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{k-1}$.

(B) Si la famille est libre on arrête tout ! Sinon la partie (A)

permet d'enlever un générateur v_i et on continue inductivement

jusqu'à ce que la famille soit libre. Le processus s'arrête puisque le nombre de vecteurs au départ est **fini**. □

4.4.1 COMBINAISONS LINÉAIRES D'UNE BASE

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

THÉORÈME

Tout vecteur x de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, pour des nombres réels $x_1, \dots, x_n$.

Existence. Une base est un **système de générateurs** !

Unicité. Si $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors

$$(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

Une base est **libre** ! Ainsi $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.



Remarque. C'est l'argument fait en 1.9.1, cours 6.

4.4.2 COORDONNÉES

DÉFINITION

Les **composantes** ou **coordonnées** d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients réels $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On se représente alors x comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

NOTATION STANDARD

Dans la base canonique $\mathcal{C}an$ de $\mathbb{R}^n$ on retrouve la notation vectorielle standard : $(\vec{x})_{\mathcal{C}an} = \vec{x}$.

4.4.2 EXEMPLE

Dans $\mathbb{R}^2$ un vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'est autre que $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'écriture vectorielle était celle des coordonnées dans $\mathcal{C}an$.

Une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est formée de $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

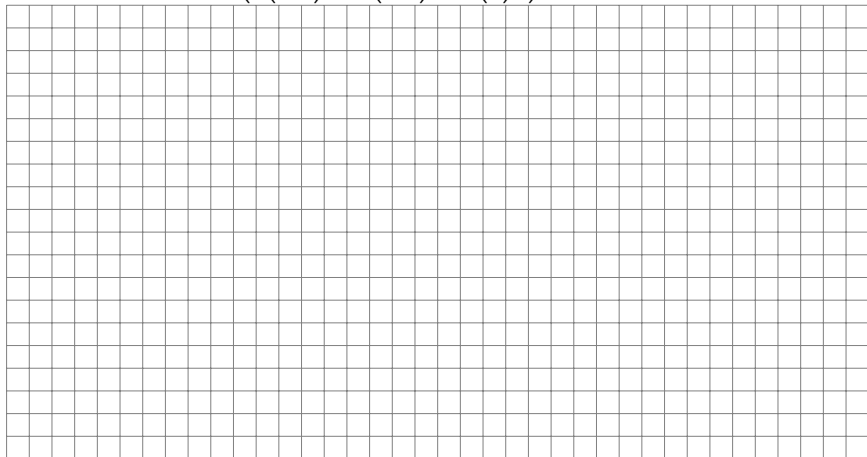
Dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ représente $\vec{u} = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2$.

Exprimé dans la base canonique il s'agit de

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (\vec{u})_{\mathcal{C}an}$$

4.4.2 EXEMPLES.

J'affirme que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.



4.4.2. SUITE



4.4.2. FIN



4.4.3 COMPARAISON AVEC $\mathbb{R}^n$

DÉFINITION

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

Un isomorphisme permet d'identifier la source et le but de cette application linéaire $T : V \rightarrow W$. Les éléments de V et W se correspondent parfaitement, et les opérations de somme et d'action aussi !

THÉORÈME

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de n vecteurs.

L'application $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(x) = (x)_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.

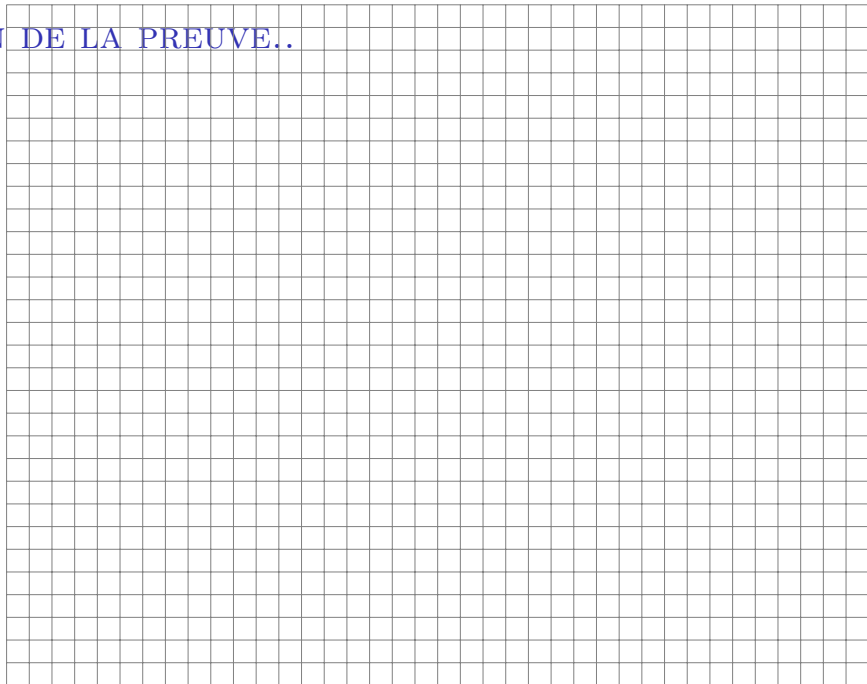
4.4.3 DÉMONSTRATION

Nous devons prouver quatre points, les deux premiers pour montrer que T est linéaire, les deux autres pour établir l'injectivité, et enfin la surjectivité.

- ❶ $T(\lambda v) = \lambda T(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $v \in V$;
- ❷ $T(v + w) = T(v) + T(w)$ pour tous $v, w \in V$;
- ❸ $T(v) = \vec{0} \implies v = 0$; (critère d'injectivité)
- ❹ Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe $v \in V$ tel que $T(v) = \vec{b}$

Soient donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v, w \in V$ que nous écrivons - de manière unique ! - comme $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ et $w = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$.

FIN DE LA PREUVE..



4.4.3 EXEMPLES

- ❶ $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme. Pour la base canonique $\mathcal{C}an = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$, on a

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{C}an} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

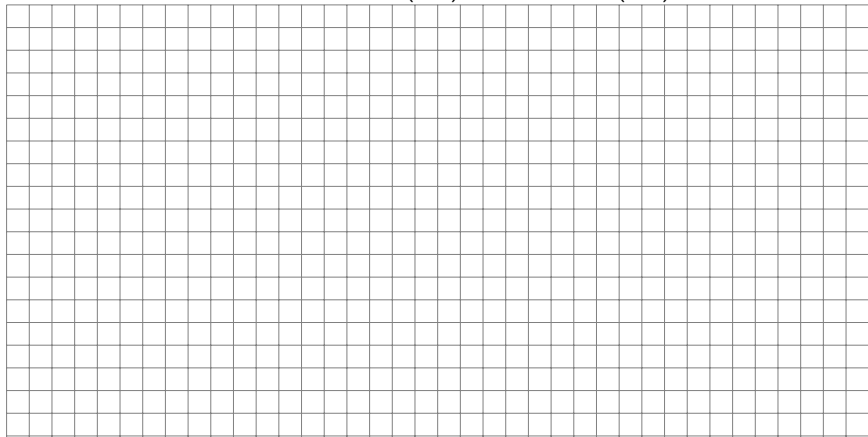
- ❷ $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est un isomorphisme. Pour la base canonique $\mathcal{C}an = (1, t, t^2, t^3)$ on a

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

4.4.3 EXEMPLE 3.

Soit W le plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{B}$ la

base formée des vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



4.4.4 BASES ET COORDONNÉES

Considérons les polynômes

$$p(t) = 1 + t^2, q(t) = 1 - t^2, r(t) = 1 - 2t + t^2 \in \mathbb{P}_2$$

On les écrit en coordonnées dans la base canonique :

$$(p)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (q)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r)_{can} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PIVOTS

La famille (p, q, r) est une base de $\mathbb{P}^2$ si et seulement si la matrice

carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a trois pivots.

4.4.4 SUITE.



4.5.1 CARDINALITÉ D'UNE BASE

Généralisons. Soit

- ❶ V un espace vectoriel,
- ❷ $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de V ,
- ❸ $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ une famille ordonnée de vecteurs de V .

THÉORÈME

La famille ordonnée $\mathcal{C}$ est une base de V si et seulement si la matrice $A = ((c_1)_{\mathcal{B}}, \dots, (c_m)_{\mathcal{B}})$ a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne.

REMARQUE

En particulier A est une matrice carrée ($m = n$) et inversible.

4.5.1 CARDINALITÉ D'UNE BASE

Preuve. Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

On a donc un isomorphisme $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $T(v) = (v)_{\mathcal{B}}$.

- 1 On aimerait savoir quand $\mathcal{C}$ est une famille libre ;
- 2 On aimerait savoir quand $\mathcal{C}$ engendre V .

Famille libre. Il s'agit de comprendre quelles combinaisons linéaires $\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_m c_m$ donnent le vecteur nul. Or, comme T est **injective**, cette expression est nulle si et seulement si son image par T est nulle. De plus

$$\vec{0} = T(0) = T(\alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_m c_m) = \alpha_1 T(c_1) + \dots + \alpha_m T(c_m)$$

Ce système (écrit sous forme vectorielle) a une solution unique quand $A = (T(c_1), \dots, T(c_m))$ a un pivot dans chaque colonne.

4.5.1 CARDINALITÉ D'UNE BASE

Famille génératrice. Il s'agit de comprendre si tout vecteur de V peut s'écrire comme combinaison linéaire $\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m$. Or, comme T est **surjective**, tout vecteur $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $T(v)$ pour un vecteur $v \in V$.

Ainsi on se demande quand le système (écrit sous forme vectorielle)

$$\alpha_1 T(c_1) + \cdots + \alpha_m T(c_m) = \vec{b}$$

a une solution pour tout $\vec{b}$, par linéarité de T comme ci-dessus.

En effet si $T(\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m) = T(v)$, alors

$\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_m c_m = v$ par **injectivité** de T .

Ce système a une solution unique quand $A = (T(c_1), \dots, T(c_m))$ a un pivot dans chaque ligne. □

4.5.2 LA DIMENSION

THÉORÈME

Deux bases de V ont le même nombre d'éléments.

COROLLAIRE

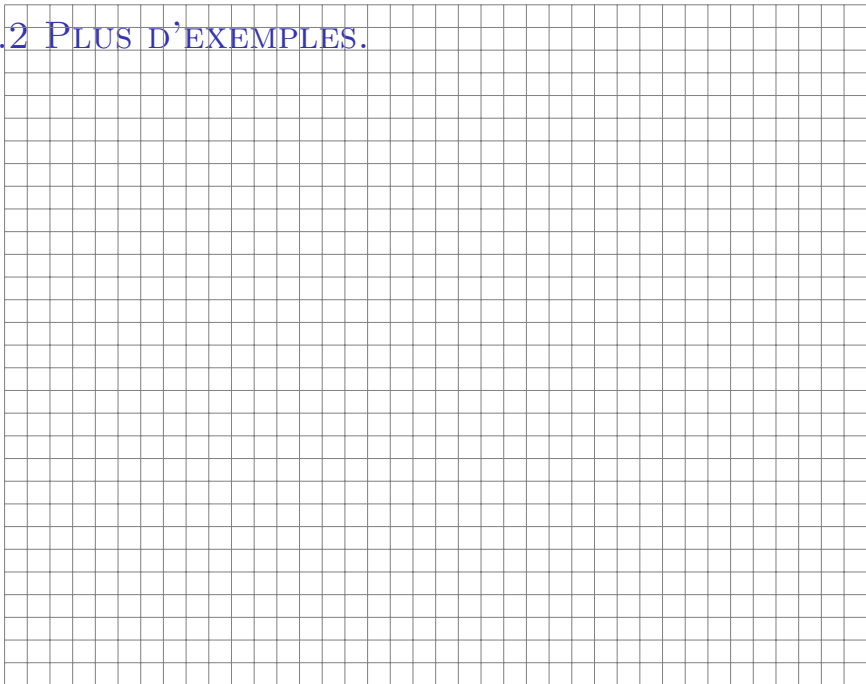
Si V admet une base de n vecteurs, alors une famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ de vecteurs de V avec $k > n$ est liée.

DÉFINITION

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base. La **dimension** de V est n . On note $\dim V = n$.

- ❶ $\dim \mathbb{R}^n = n$
- ❷ $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$
- ❸ $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$

4.5.2 PLUS D'EXEMPLES.



4.5.3 COMPLÉMENTS SUR LA DIMENSION

DIMENSION ZÉRO

Un espace vectoriel V est de **dimension nulle** si et seulement si $V = \{0\}$.

En effet 0 est un vecteur linéairement dépendant, il ne peut donc faire partie d'aucune base ! De plus notre convention était que $\text{Vect}\{\emptyset\} = \{0\}$. Ainsi l'ensemble vide est une famille libre de générateurs de $\{0\}$.

PROPOSITION

Soit V un espace vectoriel de dimension n . Si W est un sous-espace de V , alors $\dim W \leq n$.

Preuve. Toute famille de plus de n vecteurs de V est liée. |

4.5.4 LA DIMENSION ET LES SOUS-ESPACES DE $\mathbb{R}^3$

Il y a dans $\mathbb{R}^3$:

- ❶ Un seul sous-espace de dimension zéro $\{\vec{0}\}$
- ❷ Une infinité de sous-espaces de dimension 1 : droites $\text{Vect}\{\vec{u}\}$ passant par l'origine
- ❸ Une infinité de sous-espaces de dimension 2 : plans $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ passant par l'origine
- ❹ Un seul sous-espace de dimension trois $\mathbb{R}^3$

Car trois vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

4.5.5 THÉORÈME DE LA BASE INCOMPLÈTE

On peut extraire une base d'une famille de générateurs et on peut compléter une famille libre en une base !

THÉORÈME

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \dots, e_k\}$ une famille libre de vecteurs de V . Il existe alors des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de V .

Preuve. Si $(e_1, \dots, e_k)$ forme déjà une base de V , on s'arrête là. Sinon il existe un vecteur e_{k+1} qui n'est pas dans $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\}$. J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

4.5.5 FIN DE LA PREUVE

J'affirme que $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ est libre.

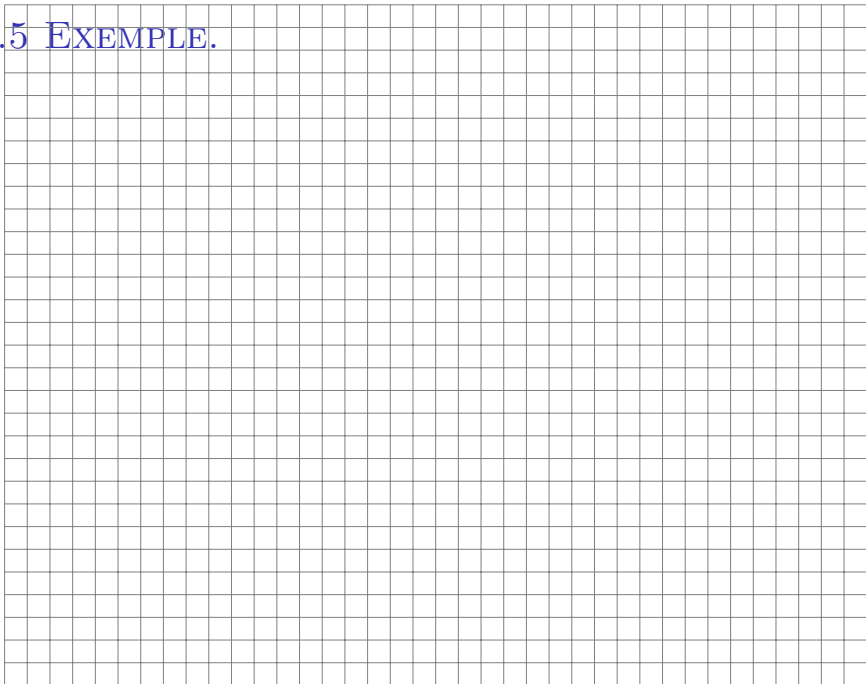
- En effet si $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \alpha_{k+1} e_{k+1} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ car e_{k+1} n'est pas combinaison linéaire des autres e_j par construction.
- Ainsi $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$.
- Comme la famille de départ est libre, tous les α_i sont nuls.

On peut donc ajouter e_{k+1} à la famille $\{e_1, \dots, e_k\}$.

On continue ce processus inductif jusqu'à compter n vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$.



4.5.5 EXAMPLE.



4.5.6 DEUX POINTS DU VUE SUR LES BASES

Soit V un espace vectoriel de dimension n .

CRITÈRES

- ① Une famille libre $\mathcal{L}$ de n vecteurs forme une base de V .
- ② Une famille génératrice $\mathcal{G}$ de n vecteurs forme une base de V .

Preuve. On peut toujours compléter une famille libre en une base et extraire une base d'une famille génératrice.

Or, si on ajoute un vecteur à $\mathcal{L}$, elle devient liée ; et si on enlève un vecteur de $\mathcal{G}$ elle ne peut plus engendrer V puisque toute base est formée de n vecteurs. □