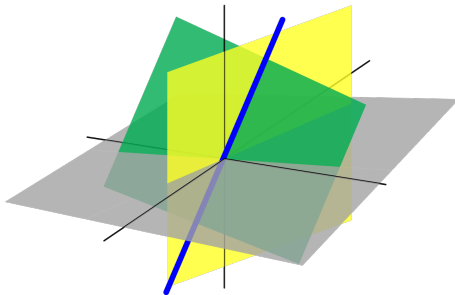


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 15 OCTOBRE

Jérôme Scherer



3.3.2 LES FORMULES DE CRAMER

Soit A une matrice $n \times n$ **inversible**. Pour tout vecteur $\vec{b}$ on pose

$$A_i(\vec{b}) = \left(\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_{i-1} \quad \vec{b} \quad \vec{a}_{i+1} \quad \dots \quad \vec{a}_n \right)$$

THÉORÈME

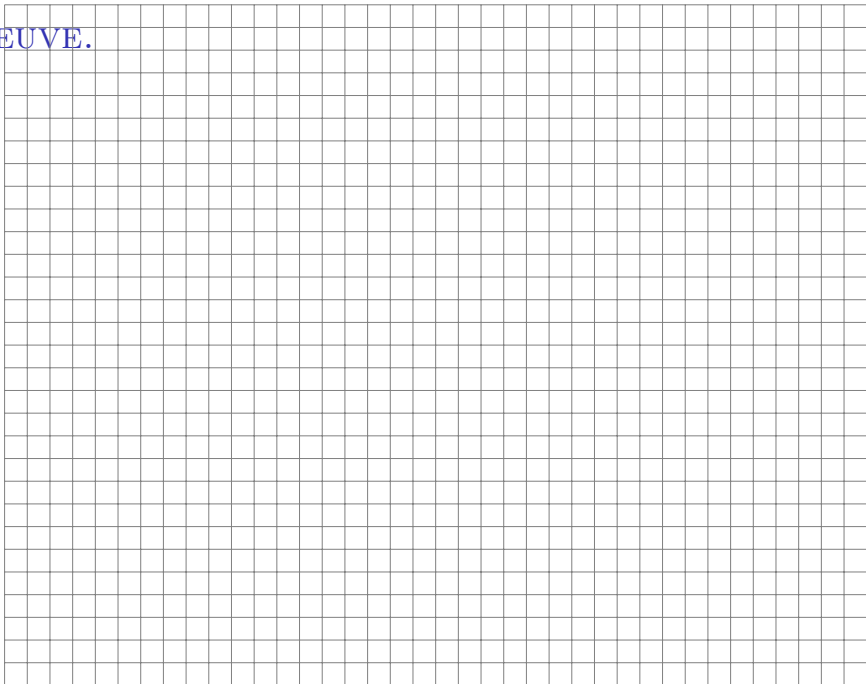
La seule solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ est donnée par la formule

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$$

Preuve. Soit $B_i = (I_n)_i(\vec{x}) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{i-1}, \vec{x}, \vec{e}_{i+1}, \dots, \vec{e}_n)$.

La ligne L_i est constituée de zéros, sauf le coefficient x_i en position (i, i) , si bien que $\det(B_i) = x_i$.

PREUVE.



3.3.3 LA MATRICE DES COFACTEURS

Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i ème ligne et la j ème colonne de A .

DÉFINITION

Le **cofacteur** $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

DÉFINITION

La **comatrice** ou **matrice des cofacteurs** de A est la matrice

$$\text{Com}A = (C_{ij})_{n \times n}$$

3.3.4 COFACTEURS ET INVERSE

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. On pose comme avant

$$A_j(\vec{e}_i) = \left(\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_{j-1} \quad \vec{e}_i \quad \vec{a}_{j+1} \quad \dots \quad \vec{a}_n \right)$$

FORMULES DE CRAMER

La seule solution du système $A\vec{x} = \vec{e}_i$ est donnée par la formule

$$x_j = \frac{\det A_j(\vec{e}_i)}{\det A}$$

De plus, en développant le déterminant selon la j -ème colonne on calcule

$$\det A_j(\vec{e}_i) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

3.3.4 FORMULE POUR L'INVERSE

Soit A une matrice $n \times n$.

THÉORÈME

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com} A)^T$$

Cette formule généralise la formule pour l'inverse d'une matrice

2×2 . En effet si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \det(d) = d$
- $C_{12} = (-1)^{1+2} \det(c) = -c$
- $C_{21} = (-1)^{2+1} \det(b) = -b$
- $C_{22} = (-1)^{2+2} \det(a) = a$

Par conséquent $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com} A)^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

3.3.4 DÉMONSTRATION

La i -ème colonne de A^{-1} est la seule solution du système $A\vec{x} = \vec{e}_i$ qui est donnée par la formule

$$x_j = \frac{\det A_j(\vec{e}_i)}{\det A} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}{\det A} = \frac{C_{ij}}{\det A}$$

On calcule la i -ème colonne de la matrice $A \cdot \frac{1}{\det A} (\text{Com} A)^T$:

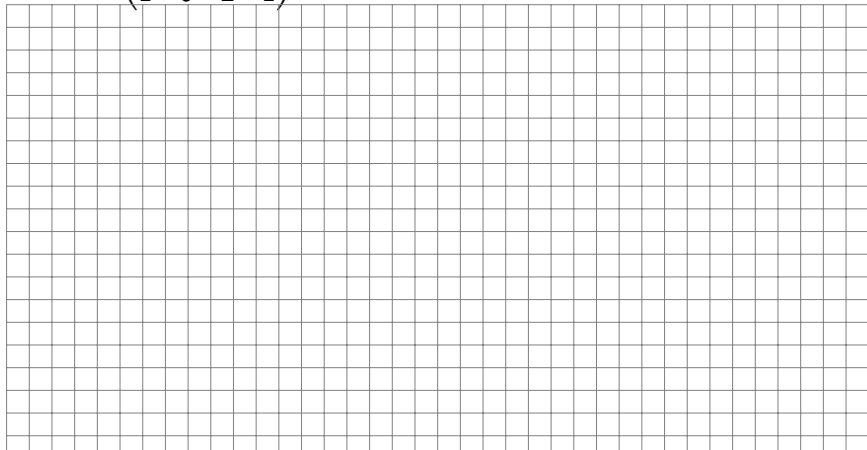
$$A \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{i1} \\ \vdots \\ C_{in} \end{pmatrix} = A\vec{x} = \vec{e}_i$$

Ainsi $A \cdot \frac{1}{\det A} (\text{Com} A)^T = I_n$.

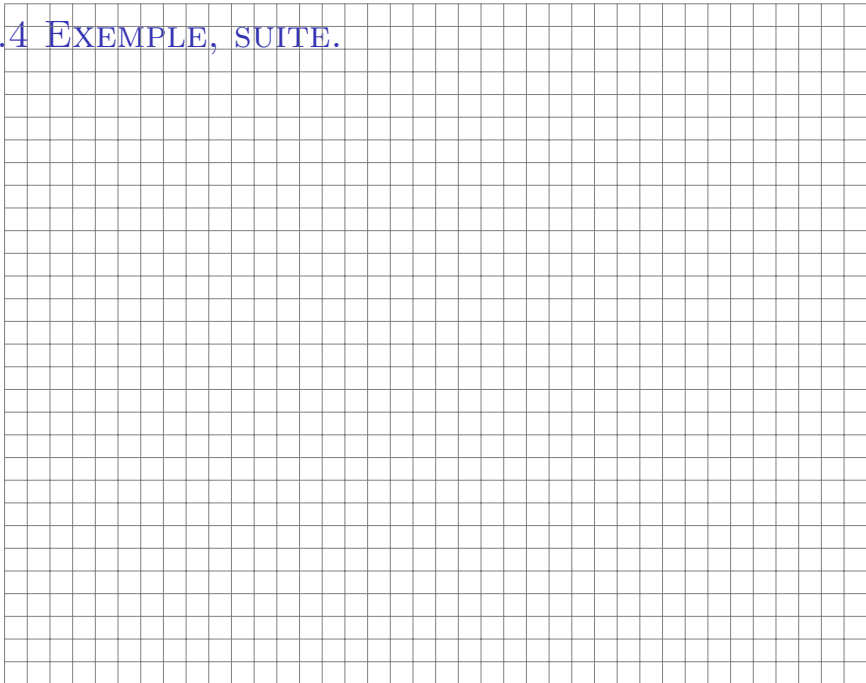


3.3.4 EXEMPLE.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A^{-1}$. Qui est b_{23} ?



3.3.4 EXEMPLE, SUITE.



3.3.5 AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME

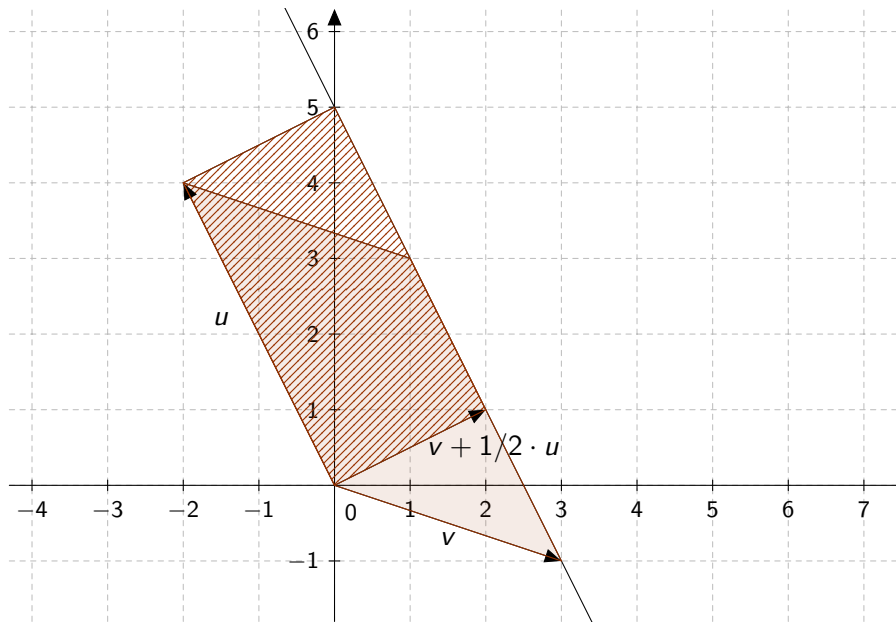
Soient $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

THÉORÈME

L'aire du parallélogramme construit sur $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ vaut $|\det A|$.

On voit sur l'illustration suivante que les deux parallélogrammes construits respectivement sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et sur $\vec{u}$ et $\vec{v} + 1/2\vec{u}$ ont même aire, car ils ont une base commune et la même hauteur.

3.3.5 INVARIANCE DE L'AIRES



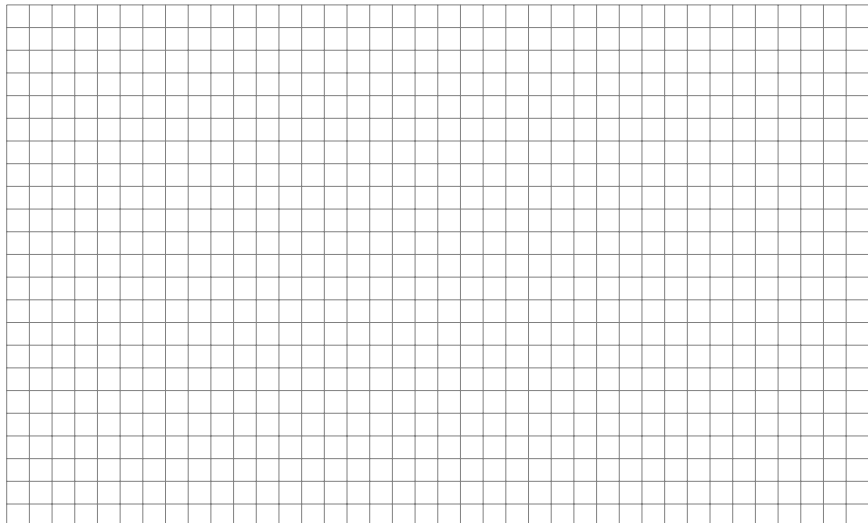
3.3.5 PREUVE.



3.3.5 EXEMPLE.

On considère le parallélogramme dont les sommets sont

$A = (1; 1)$, $B = (4; 3)$, $C = (8; 1)$ et $D = (5; -1)$.



3.3.5 VOLUME DU PARALLÉLÉPIPÈDE

THÉORÈME

Le volume du parallélépipède construit sur les colonnes d'une matrice A de taille 3×3 vaut $|\det A|$.

Remarque. L'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède ne dépendent que des vecteurs qui les supportent. L'un des sommets peut être l'origine ou non. L'aire et le volume sont **invariants par translation**.

3.3.6 AIRE ET APPLICATIONS LINÉAIRES

Une application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforme les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ainsi, T transforme le carré unité de sommets $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ et $(1; 1)$ en un parallélogramme supporté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

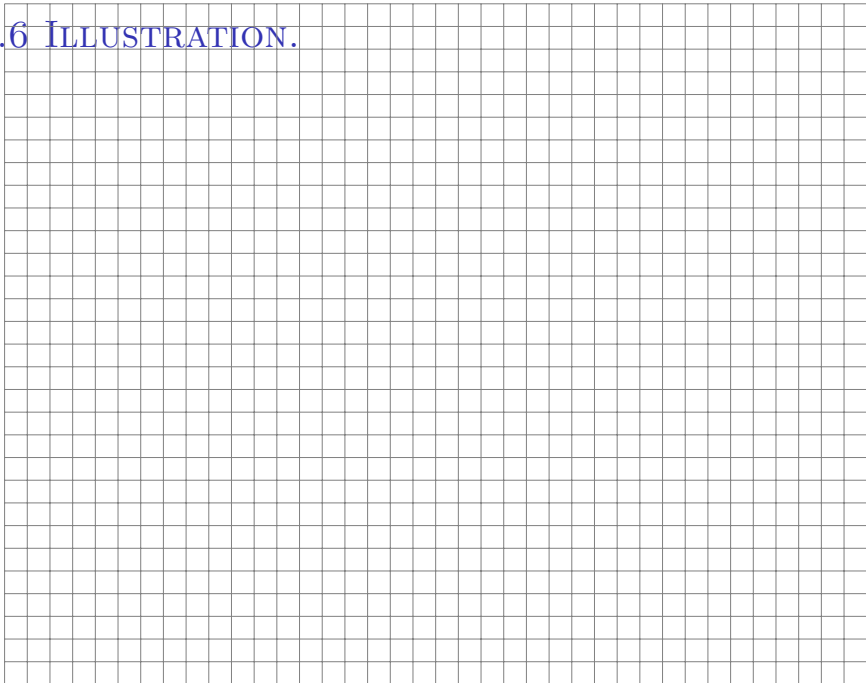
Par conséquent, si $A = (\vec{u} \ \vec{v})$, T transforme ce carré d'aire 1 en un parallélogramme d'aire $|\det A|$.

THÉORÈME

Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire représentée par la matrice A . Soit S une région du plan. Alors

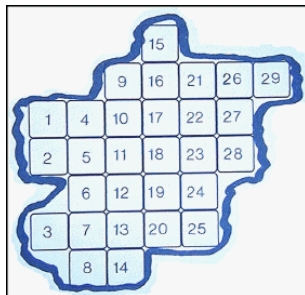
$$\text{Aire}(T(S)) = |\det A| \cdot \text{Aire}(S)$$

3.3.6 ILLUSTRATION.



3.3.6 IDÉE DE LA PREUVE

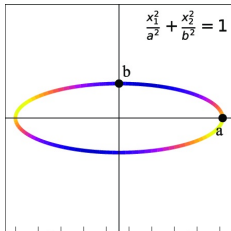
L'idée est d'approximer l'aire d'une région du plan quelconque par celles de petits carrés de côté tendant vers zéro :



Puisque le théorème est vrai pour des carrés, il est vrai, par passage à la limite, pour d'autres régions également.

3.3.6 EXEMPLE.

On cherche l'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



4.1 GÉNÉRATEURS : RAPPELS

Soit W un sous-espace vectoriel de V .

- ❶ Le sous-espace $W = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est le **sous-espace engendré** par les vecteurs $v_1, \dots, v_k$.
- ❷ Les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ sont les **générateurs** de W .
- ❸ L'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ forme une **partie génératrice** de W .

Exemple. Il existe en général plusieurs parties génératrices :

$$\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

EXAMPLE.



4.3.1 PARTIES LIBRES : RAPPELS

Soit W un sous-espace vectoriel de V .

- ❶ Les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ de W sont **linéairement indépendants** si la seule combinaison linéaire $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ qui donne le vecteur nul est la combinaison linéaire triviale :

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0.$$

- ❷ On dit que l'ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ est une **partie libre** de W .

DÉFINITION

Une famille **ordonnée** de vecteurs $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ de W est une **base** de W si c'est une partie libre qui engendre W .

4.3.2 BASES CANONIQUES

- ❶ Le cas de $\mathbb{R}^n$. La base *canonique* est

$$\mathcal{Can} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$$

- ❷ Le cas de $\mathbb{P}_n$. La base *canonique* est

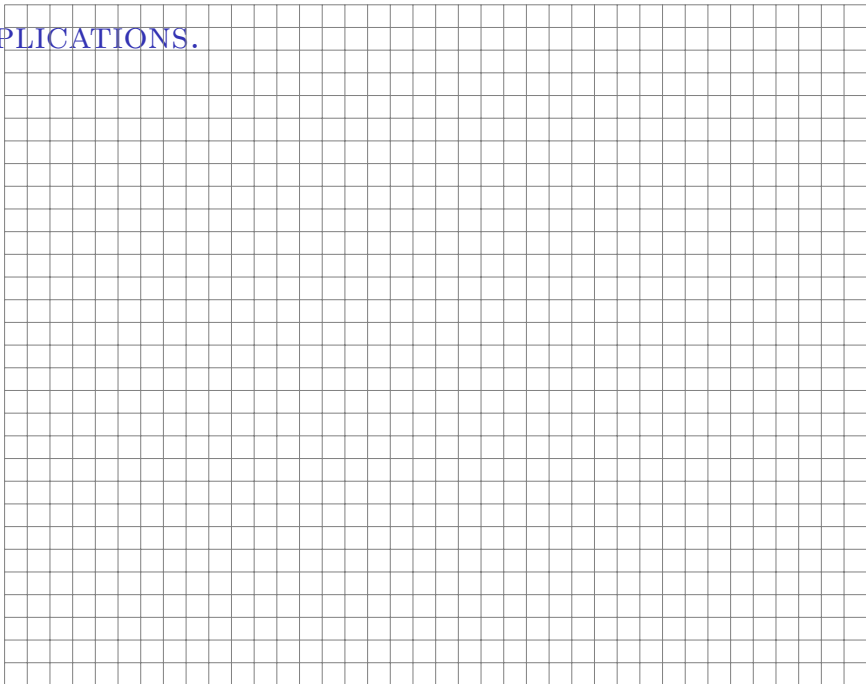
$$\mathcal{Can} = (1, t, t^2, \dots, t^n)$$

- ❸ Le cas de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. La base *canonique* est

$$\mathcal{Can} = (e_{11}, \dots, e_{1n}, e_{21}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mn})$$

où e_{ij} est la matrice constituée de zéros, sauf le coefficients (i, j) qui vaut 1.

EXPLICATIONS.



4.3.3 EXEMPLE

Soit W le plan dans $\mathbb{R}^3$ donné par l'équation $x + y + z = 0$.

L'inconnue x est principale, les inconnues y, z sont secondaires et seront nos paramètres.

$$x = -y - z$$

Les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base

$\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de W .

REMARQUE

Il n'y a pas de base canonique dans W . Nous avons fait des choix de paramètres !

EXAMPLE.



4.3.4 THÉORÈME DE LA BASE EXTRAITE

Soit $\{v_1, \dots, v_k\}$ une famille de vecteurs qui engendrent V .

THÉORÈME

- a Si l'un des vecteurs v_i est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en supprimant v_i engendre encore V .
- b Si $V \neq \{0\}$, il existe une sous-famille de $\{v_1, \dots, v_k\}$ qui forme une base de V .

Preuve. (A) Pour $i = k$. On suppose que

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$$

Puisque la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V , tout vecteur $v \in V$ est une combinaison linéaire des v_i .

PREUVE, SUITE

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k v_k \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_k (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) \\ &= (\beta_1 + \beta_k \alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) v_{k-1} \end{aligned}$$

Nous avons montré que v est combinaison linéaire de $v_1, \dots, v_{k-1}$.

(B) Si la famille est libre on arrête tout ! Sinon la partie (A)

permet d'enlever un générateur v_i et on continue inductivement

jusqu'à ce que la famille soit libre. Le processus s'arrête puisque le nombre de vecteurs au départ est **fini**. □

4.4.1 COMBINAISONS LINÉAIRES D'UNE BASE

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

THÉORÈME

Tout vecteur x de V s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, pour des nombres réels $x_1, \dots, x_n$.

Existence. Une base est un **système de générateurs** !

Unicité. Si $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors

$$(x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

Une base est **libre** ! Ainsi $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. □

Remarque. C'est l'argument fait en 1.9.1, cours 6.

4.4.2 COORDONNÉES

DÉFINITION

Les **composantes** ou **coordonnées** d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients réels $x_1, \dots, x_n$ tels que

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On se représente alors x comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

NOTATION STANDARD

Dans la base canonique $\mathcal{C}an$ de $\mathbb{R}^n$ on retrouve la notation vectorielle standard : $(\vec{x})_{\mathcal{C}an} = \vec{x}$.

4.4.2 EXEMPLE

Dans $\mathbb{R}^2$ un vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'est autre que $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'écriture vectorielle était celle des coordonnées dans $\mathcal{C}an$.

Une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est formée de $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

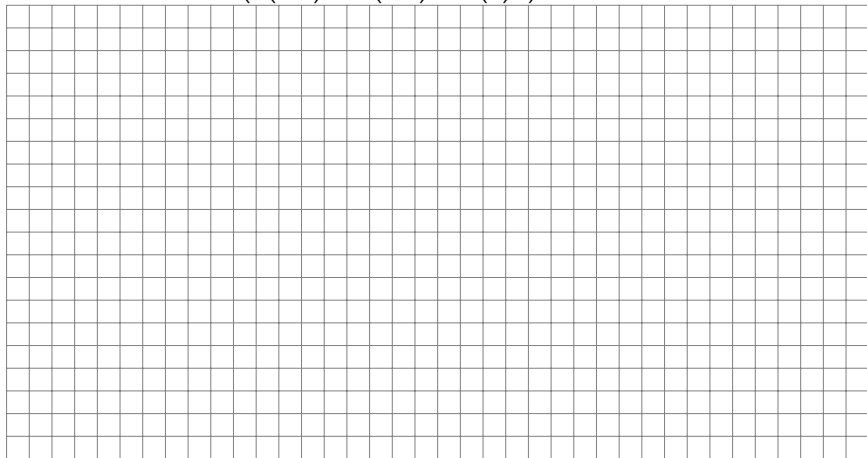
Dans la base $\mathcal{B}$ le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ représente $\vec{u} = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2$.

Exprimé dans la base canonique il s'agit de

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (\vec{u})_{\mathcal{C}an}$$

4.4.2 EXEMPLES.

J'affirme que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.



4.4.2. SUITE



4.4.2. FIN



4.4.3 COMPARAISON AVEC $\mathbb{R}^n$

DÉFINITION

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

Un isomorphisme permet d'identifier la source et le but de cette application linéaire $T : V \rightarrow W$. Les éléments de V et W se correspondent parfaitement, et les opérations de somme et d'action aussi !

THÉORÈME

Soit V un espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de n vecteurs.

L'application $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T(x) = (x)_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.