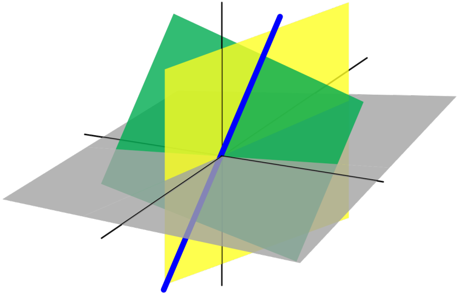
Algèbre Linéaire

Cours du 10 octobre

Jérôme Scherer



3.2.1 Déterminant et opérations élémentaires

Théorème

- (a) Une opération élémentaire de type I ne change pas le déterminant ;
- (b) Une opération élémentaire de type II change le signe du déterminant ;
- (c) Une opération élémentaire de type III (multiplier une ligne par un nombre réel α) multiplie le déterminant par α.

Preuve. Elle se fait par récurrence, on commence donc par le cas des matrices 2×2. Comme opération de type I, prenons $L_2 + \lambda L_1$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{pmatrix} \begin{aligned} &= a(d + \lambda b) - b(c + \lambda a) \\ &= ad + \lambda ab - bc - \lambda ba = ad - bc \end{aligned}$$

Suite.

3.2.1 Notation et exemple

Notation.

On écrit parfois $\det A = |A|$.

Exemple 1. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vaut -1 puisqu'on retrouve I_3 en échangeant les lignes 1 et 2.

Exemple 2. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -5 & -7 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

Suite.

3.2.2 Propriétés du déterminant

Proposition

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Remarque

Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors

$\det A = 0$.

3.2.2 Critère d'inversibilité

Théorème

Une matrice carrée est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

3.2.3 Déterminant d'un produit

Théorème

$$\boxed{\det(A^T) = \det A}$$

Preuve. Le développement du déterminant de A selon la première ligne est identique au développement du déterminant de sa transposée selon la première colonne. □

Théorème

Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

3.2.4 Démonstration

La preuve se fait en deux parties, selon que la matrice A est inversible ou non.

1. Supposons que A soit inversible. Alors nous savons que A peut s'écrire comme produit de matrices élémentaires. La preuve se fait par induction sur le nombre de matrices élémentaires.

   Pour initialiser l'induction on doit traiter le cas où A est une matrice élémentaire. Il y a donc trois sous-cas.

(I) $A = E_{ij}(\lambda)$ est de type I. Comme elle est triangulaire et que sa diagonale est consitutée de 1, on a $\det E_{ij}(\lambda) = 1$. Il faut encore calculer $\det(E_{ij}(\lambda)B)$.

Suite.

3.2.3 Démonstration, suite

La récurrence est maintenant initialisée.

Hypothèse de récurrence. Supposons que

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

pour toutes les matrices A qui sont produits d'au plus n matrices élémentaires.

Pas de récurrence. Considérons une matrice $A = E_{n+1} \cdot E_n \cdots E_1$ qui est un produit de $n+1$ matrices élémentaires. Nous devons montrer que

$$\boxed{\det(E_{n+1} \cdot E_n \cdots E_1 \cdot B) = \det(E_{n+1} \cdot E_n \cdots E_1) \cdot \det B}$$

Fin.

3.2.4 Déterminant, inverse, produit

Corollaire

Si A est inversible, alors $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}}$.

Remarque sur la commutativité

Même si en général $AB \neq BA$ on a toujours $\det(AB) = \det(BA)$ car les deux déterminants donnent $\det A \cdot \det B$.

3.2.5 Linéarité du déterrminant ?

Contre-exemple

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$. Le déterminant n'est pas linéaire comme application det : $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Mais, fixons une matrice $A = (\overrightarrow{a}_1 \dots \overrightarrow{a}_n)$. Soit T l'application qui fait correspondre à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ de $\mathbb{R}^n$ le déterminant

$$\det(\overrightarrow{a}_1 \dots \overrightarrow{a}_{j-1} \overrightarrow{x} \overrightarrow{a}_{j+1} \dots \overrightarrow{a}_n)$$

Théorème (Linéarité du déterminant comme fonction d'une colonne)

L'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est linéaire.

3.2.5 Démonstration

Slogan

Le déterminant est linéaire comme fonction d'une de ses colonnes.

Nous devons vérifier trois points.

1. $T(\overrightarrow{0}) = 0$ car c'est le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle.
2. $T(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda T(\overrightarrow{x})$ car il s'agit d'une opération de type III sur la j-ème colonne.
3. $T(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = T(\overrightarrow{x}) + T(\overrightarrow{y})$ se prouve en développant le déterminant selon la j-ème colonne.

Preuve.

3.3.1 Règles de Cramer (Genève, 1704-1752)

En 1724 Cramer n'obtient pas la chaire de philosophie convoitée, mais un poste à mi-temps grâce auquel il peut voyager : Bâle (Jean Bernoulli), Oxford.

Si $\det A = ad - bc \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{cases}$$

a une solution unique (matrice inversible).

3.3.1 Cramer, le cas $n = 2$

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax + by & = & e \\ cx + dy & = & f \end{array}\right. \quad \text{Posons } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La solution du système est $\dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} = \det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix} / \det A$$

$$y = \frac{af - ec}{ad - bc} = \det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix} / \det A$$

3.3.2 Les formules de Cramer

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ on pose

$$A_i(\overrightarrow{b}) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 & \dots & \overrightarrow{a}_{i-1} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}_{i+1} & \dots & \overrightarrow{a}_n \end{pmatrix}$$

Théorème

La seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est donnée par la formule

$$\boxed{x_i = \frac{\det A_i(\overrightarrow{b})}{\det A}}$$

Preuve.

3.3.3 La matrice des cofacteurs

Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A.

Définition

Le cofacteur $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Définition

La comatrice ou matrice des cofacteurs de A est la matrice

$$\mathrm{Com} A = (C_{ij})_{n \times n}$$

3.3.4 Cofacteurs et inverse

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. On pose comme avant

$$A_j(\overrightarrow{e}_i) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_1 & \dots & \overrightarrow{a}_{j-1} & \overrightarrow{e}_i & \overrightarrow{a}_{j+1} & \dots & \overrightarrow{a}_n \end{pmatrix}$$

Formules de Cramer

La seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$ est donnée par la formule

$$\boxed{x_j = \frac{\det A_j(\overrightarrow{e}_i)}{\det A}}$$

De plus, en développant le déterminant selon la j-ème colonne on calcule

$$\det A_j(\overrightarrow{e}_i) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

3.3.4 Formule pour l'inverse

Soit A une matrice $n \times n$ et A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A.

Définition

Le cofacteur $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = \det A_j(\overrightarrow{e}_i)$.

Définition

La comatrice ou matrice des cofacteurs de A est la matrice

$$\mathrm{Com} A = (C_{ij})_{n \times n}$$

Théorème

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\mathrm{Com} A)^T}$$

3.3.4 Démonstration

La i-ème colonne de A^{-1} est la seule solution du système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$ qui est donnée par la formule

$$\boxed{x_j = \frac{\mathrm{det} A_j(\overrightarrow{e}_i)}{\mathrm{det} A} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}{\mathrm{det} A} = \frac{C_{ij}}{\mathrm{det} A}}$$

On calcule la i-ème colonne de la matrice $A \cdot \dfrac{1}{\mathrm{det} A}(\mathrm{Com} A)^T$:

$$A \cdot \frac{1}{\mathrm{det} A} \begin{pmatrix} C_{i1} \\ \vdots \\ C_{in} \end{pmatrix} = A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e}_i$$

Ainsi $A \cdot \dfrac{1}{\mathrm{det} A}(\mathrm{Com} A)^T = I_n$. $\square$