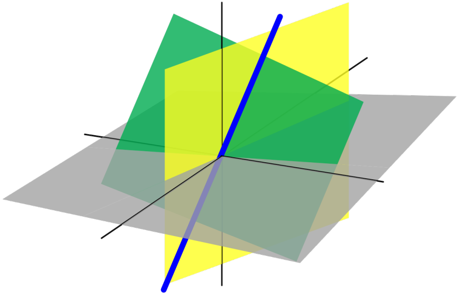
Algèbre Linéaire

Cours du 10 septembre

Jérôme Scherer



1. Equations linéaires

Notation.

1. Les lettres k, n, m, etc. représentent des nombres entiers.
2. Les lettres a, b, c ou $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seront utilisées pour des nombres (réels), des *paramètres*.
3. Les lettres x, y, z ou $x_1, x_2, \ldots, x_m$ seront utilisées pour les *inconnues*.

On note $\mathbb{R}$ pour les nombres réels, qu'on représente par une droite.

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est le plan (cartésien).
- $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i\}$.
- En général $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ est le produit cartésien de deux ensembles X et Y

1.0 Rappels sur les équations

Equation linéaire à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$

C'est une équation que l'on peut mettre sous la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Les nombres réels $a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients de l'équation et le nombre réel b est appelé terme inhomogène.

Lorsque $b = 0$ on dit que l'équation est homogène.

Exemples. $4x - 19y = 6$ est une équation linéaire (à deux inconnues), et $\sqrt{7}x + \frac{5}{17}y = \pi$ aussi. Egalement $0 = 2$.

Par contre $\sqrt{x} + y = 0$ ne l'est pas, ni $9xyz + x + y + z = 1$.

1.1 Systèmes d'équations

Système d'équations (linéaires)

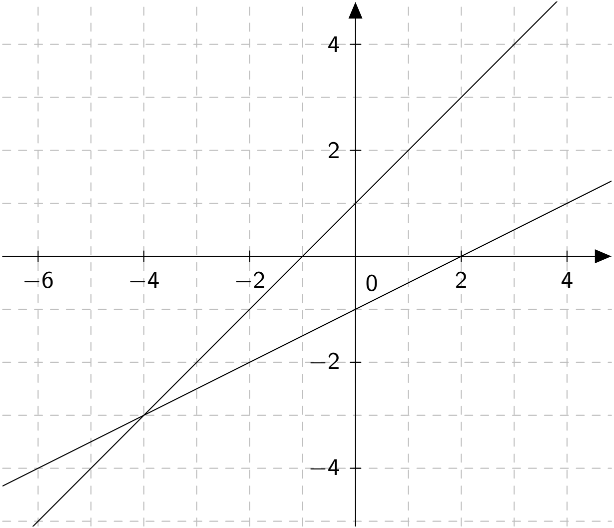
C'est un ensemble d'une ou plusieurs équations linéaires à n inconnues $x_1, \dots, x_n$.

Exemple

$$\begin{cases} x - y & = -1 \\ \frac{1}{2}x - y & = 1 \end{cases}$$

Une équation de la forme $ax + by = c$ représente une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$. Sur le slide suivant on voit $x - y = -1$ et $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Interprétation géométrique



La solution de ce système est ainsi $x = -4$ et $y = -3$. On note

$S = \{(-4; -3)\}$.

Il y a trois possibilités

pour un système de deux équations à deux inconnues :

1. Comme ci-dessus les deux droites se coupent en un seul point, il y a une solution unique au système.
2. Les deux droites sont confondues, il y a alors une infinité de solutions. C'est le cas par exemple du système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 - x_1 &= -1 \end{cases} \qquad \text{Ici } S = \{(a, a-1) | a \in \mathbb{R}\}$$

3. Les deux droites sont parallèles, il n'y a alors aucune solution.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{cases} \qquad \text{Ici } S = \emptyset$$

Interprétation en dimension supérieure

Pour des réels $a_1, \ldots, a_n, b$, une équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ représente un hyperplan de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$.

Par exemple l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ donne un plan dans $\mathbb{R}^3$.

Résolution de systèmes

But

On veut trouver la solution générale d'un système d'équations, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les solutions du système.

Exemple. On aimerait résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 & = 5 \\ x_1 - x_2 & = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 2 \end{cases}$$

Résolution de systèmes, suite

Notation matricielle

On aimerait alléger la notation et ne garder que les informations essentielles.

Etant donné un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Notation matricielle

On construit la *matrice augmentée* du système :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

dont les coefficients sont les coefficients de la première inconnue dans la première colonne, ceux de la deuxième inconnue dans la deuxième colonne, etc. La dernière colonne est séparée par une barre verticale et contient les termes inhomogènes.

Opérations sur les lignes

Correspondance entre les opérations sur les équations d'un système et celles effectuées sur les lignes d'une matrice.

1. Remplacer une équation par celle obtenue en ajoutant un multiple d'une autre équation.
2. Echanger deux équations.
3. Multiplier une équation par un nombre non nul.

---

1. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
2. Echanger deux lignes.
3. Multiplier une ligne par un nombre non nul.

Exemple

Equivalence selon les lignes

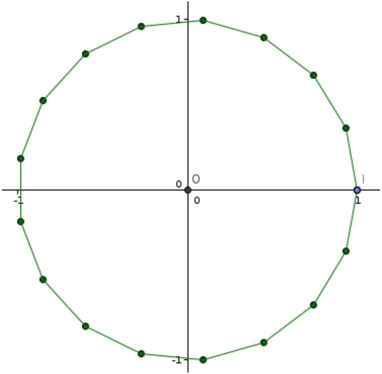
Définition

Deux matrices sont *équivalentes selon les lignes* si on peut passer de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes de type 1, 2 ou 3.

Proposition

Deux systèmes linéaires dont les matrices sont équivalentes selon les lignes admettent les mêmes solutions. On dit que les systèmes sont *équivalents*.

1.2 La méthode de Gauss



Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Matrice échelonnée et réduite

Une matrice est *échelonnée* si

1. les lignes non nulles se trouvent au-dessus des lignes nulles ;
2. le premier coefficient non nul d'une ligne (le *coefficient principal*) se trouve à droite du coefficient principal des lignes précédentes ;
3. les coefficients situés en-dessous d'un coefficient principal sont nuls.

   Elle est dite *échelonnée-réduite* si de plus

4. les coefficients principaux sont tous égaux à 1 ;
5. dans la colonne d'un coefficient principal tous les autres coefficients sont nuls.

Exemples

Méthode de Gauss

Théorème

Toute matrice est équivalente selon les lignes à une unique matrice échelonnée et réduite.

Méthode. (1) Si x_1 est une inconnue qui apparaît dans le système, la première colonne de la matrice n'est pas entièrement nulle. Quitte à échanger des lignes (type II), on peut donc supposer que le coefficient a_{11} est non nul. Dans la pratique on choisit la ligne où ce coefficient est le plus proche de 1.

(2) A l'aide d'opérations de type I on remplace la ligne L_j par la ligne $L_j - \dfrac{a_{j1}}{a_{11}} \cdot L_1$ de sorte à obtenir une matrice dont la première colonne est entièrement nulle sous le coefficient a_{11}.

Méthode de Gauss, 2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(3) Quitte à permuter des lignes (type II) on s'arrange pour que a'_{22} soit non nul ... à moins que tous les coefficients $a'_{i2} = 0$, auquel cas on passe à la colonne suivante. Disons ici que $a'_{23} \neq 0$.

Méthode de Gauss, 3

(4) Comme en (2) on utilise des opérations de type I pour obtenir des zéros sous a'_{23} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & a''_{34} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a''_{m4} & \dots & a''_{mn} & b''_m \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss, 4

(5) On continue ainsi de suite pour échelonner la matrice en utilisant uniquement des opérations de type I et II.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & a''_{34} & a''_{35} & \dots & a''_{3n} & b''_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'''_{45} & \dots & a'''_{4n} & b'''_4 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{kj} & \dots & \bar{b}_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_{k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Pivots et compatibilité

Définition

Les emplacements des coefficients principaux sont des *pivots* (ou *échelons*). Les colonnes de ces coefficients sont les *colonnes pivots*.

Définition

Un système d'équations linéaire est *compatible* s'il admet au moins une solution. Sinon il est dit *incompatible*.

S'il y a un pivot dans la dernière colonne (celle des termes inhomogènes), on a alors une équation $0 = \bar{b}_{k+1}$ et $\bar{b}_{k+1}$ est non nul. Il n'y a donc aucune solution.

1.2.2 Méthode de Gauss, réduction

(6) Si le système est compatible, on réduit la matrice échelonnée. On obtient des zéros au dessus des pivots en utilisant des opérations élémentaires de type I. On commence par le dernier pivot et on remonte dans les lignes de la matrice.

(7) On utilise enfin des opérations de type III. On divise chaque ligne non nulle par son pivot pour transformer chaque coefficient principal en 1.

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. $\square$

Remarque

Dans la pratique on peut utiliser des opérations de type III plus rapidement. L'ordre des opérations ne change pas la forme échelonnée et réduite de la matrice puisqu'elle est unique.

Exemple avec paramètre $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} ax & +y & +z & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \\ x & +y & +az & = 1 \\ x & +y & +z & = a \end{cases}$$

Suite