

Exercice 1. Le vecteur $\vec{w}$ est dans $\text{Ker} A$ car on calcule $A\vec{w} = \vec{0}$.

Le vecteur $\vec{w}$ est aussi dans $\text{Im} A$ car le système $A\vec{x} = \vec{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par

exemple $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, tel que $A\vec{x} = \vec{w}$.

Exercice 2. L'espace nul ou noyau de C est la solution générale de l'équation $C\vec{x} = \vec{0}$. On doit résoudre cette équation pour trouver une base de $\text{Ker} C$. On échelonne puis on réduit C :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_4 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_2 - \frac{5}{2}l_1 \\ l_3 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_4 - 4l_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} . \\ . \\ l_3 + l_2 \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} . \\ . \\ . \\ l_4 + 5l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On réduit la forme échelonnée précédente :

$$C \sim \begin{matrix} . \\ l_2 - 2l_3 \\ . \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} . \\ -\frac{2}{3}l_2 \\ . \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} l_1 - l_2 \\ . \\ . \\ . \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme échelonnée réduite de C est donc $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On écrit le système $C'\vec{x} = \vec{0}$ sous la forme classique, pouvant à présent exprimer chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{26}{3}x_5 = 0 \\ x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_5 \\ x_2 = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{3}x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 4x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

La forme vectorielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la solution générale du système $C\vec{x} = \vec{0}$:

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le noyau de C est engendré par les vecteurs obtenus ci-dessus, que l'on choisit par exemple de multiplier par 3 pour éviter des fractions :

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 26 \\ 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. L'application T n'est pas surjective puisque l'espace des colonnes n'engendre pas $\mathbb{R}^4$ et elle n'est pas injective puisque le vecteur nul n'est pas la seule solution de $C\vec{x} = \vec{0}$.

Exercice 3. On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes. En analysant la matrice B on remarque alors que :

1. Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne $\text{rang} A = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de $\text{Im} A$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve $\dim \text{Ker} A = 4 - \text{rang} A = 2$.

2. L'équation $A\vec{x} = 0$ est équivalente à $B\vec{x} = 0$; une base de $\text{Ker} A$ est donnée par exemple

par : $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ et donc $\dim \text{Ker} A = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.

3. Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B :

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} \right)$$

4. Enfin $\text{Im}A$ coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T . Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3 - 2 = 1$.

On trouve que $\text{Ker}A^T$ est engendré par $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 4.

(a) On calcule $\det(A) = 6 - a^2 + a$. Donc, si $a \neq -2$ ou $a \neq 3$, $\det(A) \neq 0$ et A est inversible. Dans ce cas, $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^2$ et $\text{Ker}(A) = 0$.

Si $a = -2$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $\text{Im}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et

$\text{Ker}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $a = 3$, alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Donc $\text{Im}(A)$ est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\text{Ker}(A)$

est de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Par l'Exercice 9 de la série 5, on calcule

$$\det(B) = (2-1)(2-a)(2-(-1))(-1-1)(-1-a)(a-1) = 6(a-2)(a+1)(a-1).$$

Si $a \neq 2, -1$ et 1 , alors $\det(B) \neq 0$ et B est inversible. Dans ce cas, $\text{Im}(B) = \mathbb{R}^4$ et $\text{Ker}(B) = 0$.

Si $a = 2, -1$ ou 1 , alors le noyau de B est donné par le noyau de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{Ker}(B)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par le théorème

du rang, on a que $\text{rang}(B) = 4 - \dim \text{Ker}(B) = 4 - 1 = 3$. Ainsi $\text{Im}(B)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de

dimension 3 avec base donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. L'application T est linéaire puisque chacune des composantes de $T(p+q)$ est égale à $(p+q)(0) = p(0) + q(0)$, par définition de la somme de polynômes. De même $(\alpha p)(0) = \alpha \cdot p(0)$ pour tout nombre réel α , ce qui montre la compatibilité de T avec l'action.

L'image de T est constituée de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$. Leurs deux composantes sont égales et elles peuvent être non nulles (il suffit de choisir le polynôme constant 1 pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$). Ainsi l'image de T est de dimension un, une base est donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par le Théorème du rang, le noyau est donc de dimension $\dim \mathbb{P}_2 - 1 = 3 - 1 = 2$. Pour terminer il nous suffit de comprendre quels sont les polynômes p qui sont envoyés sur zéro par T . Ce sont tous ceux pour lesquels $p(0) = 0$, ce qui signifie que le coefficient constant est nul. Autrement dit

$$\text{Ker}T = \{bt + ct^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{t, t^2\}$$

Une base du noyau est ainsi donnée par (t, t^2) .

Exercice 6. Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \{1 + t, 1 + t^2\}$ et le noyau de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{1 - t, t^2 - t^3\}$.

Le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5 + 2t^2) = 7 + 5t + 2t^2$.

Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ sont $(7 + 5t + 2t^2)_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, puisque

$$7 + 5t + 2t^2 = 5(1 + t) + 2(1 + t^2).$$

Le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T puisque $T(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3) = 0$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ sont $(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3)_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, puisque

$$2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 = 2(1 - t) - 5(t^2 - t^3).$$

Exercice 7. Les colonnes de la matrice $\vec{u} \vec{v}^T$ sont toutes multiples (non nuls) du vecteur non nul $\vec{u}$, ce qui signifie que $\text{Im}(\vec{u} \vec{v}^T) = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ est de dimension 1.

Exercice 8. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Dire que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet toujours une solution est équivalent à dire que A est surjective, i.e. $\dim \text{Im}A = m$. Par le Théorème du rang la dimension du noyau de A vaut $n - m$, ou encore le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension m . Les lignes de A étant les colonnes de A^T ceci veut dire que $\dim \text{Im}A^T = m$. Une dernière application du Théorème du rang nous permet enfin de conclure que $\dim \text{Ker}A^T = n - m = 0$. La matrice A^T représente donc une application linéaire injective. Ceci équivaut à dire que l'équation $A^T\vec{x} = 0$ n'admet que la solution triviale.

Exercice 9.

a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. On calcule A^2 en utilisant simplement le fait que $P^{-1}P = I_2$:

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Comme D est diagonale alors son carré est aussi une matrice diagonale. Les coefficients sur la diagonale sont les carrés des coefficients de la diagonale de D .

De manière générale, la puissance d'une matrice diagonalisable A est égale à $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$.

Ceci est facile à montrer par un raisonnement par récurrence :

1. Par hypothèse, la propriété est satisfaite pour $n = 1$.
2. La ligne suivante montre que si la propriété est vraie pour n elle est vraie pour $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

3. On conclut par récurrence.

b) On calcule d'abord l'inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $A = PDP^{-1}$. Par a), on a $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$, où

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car D est diagonale et donc D^{10} aussi, et les coefficients de la diagonale de D^{10} sont les coefficients de la diagonale de D à la puissance 10. On calcule :

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 1 \\ 1024 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Choix Multiple et Vrai-faux .

- a. ☐ $\text{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Ainsi $\text{Im}A$ est un

sous-espace de $\mathbb{R}^4$, pas de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de A . On constate qu'elles sont proportionnelles si bien que la dimension de $\text{Im}A$ est 1.

- b. ☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A .

La dimension du sous-espace engendré par les lignes de A est égale à celle du sous-espace engendré par les colonnes de A . C'est la clé du Théorème du rang ! Ces deux sous-espaces sont donc tous deux isomorphes à $\mathbb{R}^k$ si k est cette dimension. Ils sont donc isomorphes, c'est-à-dire que l'on peut les identifier en faisant correspondre les éléments d'une base de l'un à ceux d'une base de l'autre. Par contre ils ne sont pas égaux en général puisqu'ils ne vivent pas même dans le même espace vectoriel ambiant. L'espace des lignes est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors que celui des colonnes est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$.

Pour se rendre compte que les deux autres affirmations sont fausses, pensez par exemple à une matrice non nulle ayant une unique ligne et disons 10 colonnes. Le noyau de cette matrice est de dimension 9 (une équation à 10 inconnues) alors que le noyau de la transposée est nul. Visiblement les colonnes de A ne peuvent engendrer le noyau de A^T .

- c. $\square \dim \text{Ker} A = 5$ et $\dim \text{Im} A = 2$

La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension ≤ 3 . Le Théorème du rang affirme que $\dim \text{Ker} A = 7 - \dim \text{Im} A \geq 7 - 3 = 4$, ce qui élimine les deux premières affirmations. Intuitivement c'est clair : il faut "tuer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A = 7$, ce qui élimine aussi la troisième affirmation. la seule qui ne contredit pas le Théorème du rang est la dernière.

- d. $\square \dim \text{Ker} A = 1$ et $\dim \text{Im} A = 2$

On a $\dim \text{Ker} A = 1$, puisque le noyau est la droite $\text{Vect}\{\vec{e}_3\}$. et $\dim \text{Im} A = 2$ puisque l'image de A est le plan Oxy , un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

- e. $\square$ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de $\mathbb{R}^5$. Donc en particulier elles engendrent $\mathbb{R}^5$ et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, si bien que le noyau est *nul* (pas vide!), et l'image de A est $\mathbb{R}^5$ tout entier, donc le rang de A vaut 5.

- f. $\square \dim \text{Ker} T = 2$ et $\dim \text{Im} T = 1$.

L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a + bt + ct^2) = 3a + 2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

- g. $\square \{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

Par g., la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que les polynômes $-2 + t + 3t^2$ et $2 - 3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T . Ils forment donc une base du noyau. En revanche, le polynôme $3 + 2t^2$ n'est pas dans le noyau car $T(3 + 2t^2) = 13 \neq 0$.