EPFL - Semestre d'Automne 2024-2025 — J. Scherer

Algèbre Linéaire — **Corrigé 2**

Informatique — le 20 septembre 2024

Exercice 1. (a) A partir de la matrice augmentée du système linéaire, on obtient par des opérations élémentaires :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 12 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim^{L_2-3/2L_1}_{L_3+2L_1} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5/2 & 27/2 \\ 0 & -7 & 4 & -10 \end{bmatrix} \sim_{L_3+7/8L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 29/16 & 29/16 \end{bmatrix} \sim^{L_3 \cdot 16/29} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1-L_3}_{L_2+5/2L_3} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1+1/2L_2}_{L_2 \cdot 1/8}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1 \cdot 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système est donc donnée par

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$$

(b) Pensez à bien écrire quelles sont les opérations que vous faites à chaque étape !

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim^{-L_2+3L_1}_{-L_3+5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 34 \end{bmatrix} \sim^{L_2 \cdot 1/4}_{L_3 \cdot 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 17 \end{bmatrix} \sim_{L_3-3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim_{L_3 \cdot 1/5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1-7L_3}_{L_2-3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1-3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. Tout élément de l'espace engendré par $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ est de la forme

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont des reéls. Le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ est engendré par $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ si et seulement il existe des réels, a_1 et a_2 tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite :

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim^{L_2-2L_1}_{L_3-L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & h-5 \end{pmatrix} \sim_{L_3-2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix} \sim_{(L_1-L_2)\cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix}$$

D'où $h = -9$ pour satisfaire le théorème 2 avec $a_1 = 6$, $a_2 = -7$.

(b) Pour voir si le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le plan engendré par les colonnes de A, on construit une nouvelle matrice $B = [A \quad \overrightarrow{v}]$, alors la forme échelonnée réduite de B montre que

$$\overrightarrow{v} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

et donc $\overrightarrow{v}$ est bien dans ce plan.

Exercice 3. Pour le premier système, la matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 4 & h & 5 \end{bmatrix} \sim_{L_2-4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & h-8 & 5-4k \end{bmatrix}$$

— si $h = 8$ et $k \neq \frac{5}{4}$, il n'y a pas de solution,
— si $h \neq 8$, il y a une solution unique,
— si $h = 8$ et $k = \frac{5}{4}$, il y a une infinité de solutions.

Pour le second système, la matrice augmentée est

$$\begin{bmatrix} -3 & h & 1 \\ 6 & k & -3 \end{bmatrix} \sim_{L_2+2L_1} \begin{bmatrix} -3 & h & 1 \\ 0 & k+2h & -1 \end{bmatrix}$$

— si $k = -2h$, il n'y a pas de solution,
— si $k \neq -2h$, il y a une solution unique,
— il n'existe pas de valeurs h et k pour lesquelles il y ait une infinité de solutions.

Exercice 4.

1. On constate d'abord que toute combinaison linéaire $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3$ est un vecteur dont la troisième composante est nulle. On affirme ensuite que tout vecteur $\mathbf{v}$ du plan Oxy se trouve dans le sous-espace engendré par ces trois vecteurs. En effet le système

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

   a toujours une solution dans ce cas. On conclut que $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est le plan horizontal Oxy dans $\mathbb{R}^3$.
2. Une combinaison linéaire $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 = t(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$ est un polynôme de $\mathbb{P}^3$ sans terme constant. Autrement dit le sous-espace engendré par t, t^2 et t^3 est le sous-espace des polynômes qui sont multiples de t.

Exercice 5.

1. (a) L'ensemble $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 7y = z\}$ est un sous-espace. En effet,
      i. Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ vérifie la condition $3x - 7y = z$.

ii. Si (x,y,z) et (x',y',z') sont tels que $3x-7y=z$ et $3x'-7y'=z'$, alors $3(x+x')-7(y+y')=z+z'$. Donc l'ensemble E_1 est stable par somme.

iii. Si (x,y,z) est tel que $3x-7y=z$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $3(\alpha x)-7(\alpha y)=\alpha z$. Donc l'ensemble E_1 est stable par produit scalaire.

(b) L'ensemble $E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2-z^2=0\}$ n'est pas un sous-espace. En effet, les vecteurs $(1,0,1)$ et $(1,0,-1)$ appartiennent à E_2, mais leur somme $(2,0,0)$ n'appartient pas à E_2. Donc l'ensemble E_2 n'est pas stable par somme.

(c) L'ensemble $E_3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=x+y-z=0\}$ est un sous-espace.

i. Le vecteur nul $(0,0,0)$ vérifie les conditions $x+y+z=x+y-z=0$.

ii. Si (x,y,z) et (x',y',z') sont tels que $x+y+z=x+y-z=0$ et $x'+y'+z'=x'+y'-z'=0$, alors $(x+x')+(y+y')+(z+z')=(x+x')+(y+y')-(z+z')=0$. Donc l'ensemble E_3 est stable par somme.

iii. Si (x,y,z) est tel que $x+y+z=x+y-z=0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors $\alpha x+\alpha y+\alpha z=\alpha(x+y+z)=0=\alpha(x+y-z)=\alpha x+\alpha y-\alpha z=0$. Donc l'ensemble E_3 est stable par produit scalaire.

(d) L'ensemble $E_4=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2)=0\}$ n'est pas un sous-espace. En effet, les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,0,1)$ appartiennent à E_4, mais leur somme $(1,0,1)$ n'appartient pas à E_4. Donc l'ensemble E_4 n'est pas stable par somme.

(e) On différencie les cas.

1. Si $r\neq 0$, alors le vecteur $(0,0,0)$ n'appartient pas à $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+r=0$ et $x+3rz=0\}$ car il ne satisfait pas l'équation $x+y+r=0$. Donc ce n'est pas un sous-espace.
2. Si $r=0$, alors $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y=0$ et $x=0\}$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(0,0,1)$. Donc c'est un sous-espace.

Remarque : *les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ donnés par un système d'équations* ***linéaires homogène*** *sont des sous-espaces, alors que les autres ne le sont pas.*

2. (a) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t)=at^2$ où a est un réel quelconque est le sous-espace de $\mathbb{P}_9$ engendré par le polynôme t^2. Il s'agit donc d'un sous-espace.

(b) L'ensemble des polynômes de la forme $p(t)=a+t^2$ n'est pas un sous-espace car il ne contient pas le polynôme nul.

(c) L'ensemble de ces polynômes à coefficients entiers n'est pas un sous-espace. Si on multiplie le polynôme t par $\sqrt{2}$ par exemple on ne reste pas dans le sous-ensemble.

(d) L'ensemble des polynômes dans $\mathbb{P}_9$ vérifiant $p(0)=0$ est un sous-espace.

i. Le polynôme nul vérifie cette condition $p(0)=0$.

ii. Si $p(0)=0$ et $q(0)=0$, alors $(p+q)(0)=p(0)+q(0)=0+0=0$. Donc l'ensemble est stable par somme.

iii. Si $p(0)=0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, alors αp vérifie aussi la condition puisque $(\alpha p)(0)=\alpha\cdot p(0)=0$. Donc l'ensemble est stable par l'action.

Exercice 6. Union et intersection. Soit V un espace vectoriel et U, W des sous-espaces de V.

1. Le vecteur nul se trouvant dans U et dans W il se trouve également dans l'intersection $U \cap W$. On vérifie ensuite la stabilité de la somme : Soient u et v des vecteurs de $U \cap W$, alors $u + v$ est un vecteur de U car $u, v \in U$ et U est un sous-espace de W ; de même $u + v$ est un vecteur de W et par conséquent $u + v \in U \cap W$. Pour terminer la stabilité de l'action se démontre de la même façon. Soit u un vecteur de $U \cap W$ et λ un nombre réel. Alors λu se trouve dans U car U est un sous-espace et λu se trouve dans W pour la même raison. On conclut que λu appartient à $U \cap W$.
2. Un exemple explicite est donné au point 4. En général on se rend bien compte que la réunion de deux droites dans le plan n'est pas un sous-espace du plan car la somme n'est pas stable.
3. Le vecteur nul appartient à la somme $U + W$ car $0 = 0 + 0 \in U + W$. On montre maintenant que $U + W$ est stable pour la somme. Soient $a = u + w$ et $a' = u' + w'$ deux vecteurs de $U + W$. Alors
$$a + a' = (u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w')$$
par commutativité et associativité de la somme de vecteurs dans V. Cette écriture montre que $a + a' \in U + W$. Pour l'action on montre que λa appartient $U + W$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda a = \lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w$$
Comme $\lambda u \in U$ et $\lambda w \in W$, on a terminé la preuve.
4. La réunion $U \cup W$ est l'union de deux droites sécantes passant par l'origine, alors que la somme $U + W$ est un plan. Il s'agit ici du plan horizontal Oxy, voir aussi l'exercice 2.

Exercice 7. Choix Multiple.

(a) Dans cet exercice à choix multiple il s'agit encore une fois d'effectuer des opérations sur les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-\text{L1} \\ \text{L4}-\text{L1}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-2\text{L2} \\ \text{L4}-2\text{L2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On voit donc que c'est la troisième colonne qui ne contient pas de pivot. Remarquons qu'il y a des choix plus économiques pour échelonner et réduire cette matrice, si on avait voulu résoudre le système associé (ce qui n'est pas le cas).

(b) On a l'équivalence

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right] \sim_{L_2+2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right].$$

Le système linéaire correspondant à cette matrice est :

$$\begin{aligned} x - 3y &= h \\ 0 &= 2h - 5; \end{aligned}$$

il est consistant si et seulement si $2h - 5 = 0$, c'est-à-dire si $h = 5/2$.

(c) On a l'équivalence :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 1 \\ h & 2 & 1 \end{array}\right] \sim_{L_2-hL_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 1 \\ 0 & 2-h^2 & 1-h \end{array}\right].$$

La dernière ligne correspond à l'équation $(2-h^2)y = 1-h$, il y a donc deux situations possibles. Soit $2-h^2$ est non nul, auquel cas le système est consistant, car la matrice est échelonnée et les pivots se trouvent dans les colonnes des inconnues, soit $2-h^2 = 0$, alors $h = \pm\sqrt{2}$. Dans ce cas le terme inhomogène $1-h = 1 \pm \sqrt{2}$ est non nul, le système est inconsistant, il n'admet aucune solution. La seule bonne réponse est donc la dernière, $h \neq \pm\sqrt{2}$.

(d) Deux matrices qui sont équivalentes selon les lignes sont forcément de la même taille, c'est-à-dire elles ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Par contre, deux matrices qui ont le même nombre de lignes ne sont pas forcément équivalentes selon les lignes. Par exemple, la matrice (0) de taille 1×1 n'est pas équivalente selon les lignes à (1).

(e) Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible ! La matrice A a beau avoir un pivot dans la dernière colonne, il ne s'agit pas ici d'un pivot dans la colonne des termes inhomogènes. Ceux-ci sont tous nuls et on ne les écrit pas. En revanche, la ligne $(0\ 0\ 0\ 7)$ montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible, ce qui prouve également qu'un système d'équations linéaires inhomogène n'est pas toujours compatible.

(f) ☐ Vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours.

☐ Faux. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme $(0\ 0\ 0\ 0\ 7)$ par exemple pour que le système soit incompatible.

☐ Faux. La matrice augmentée d'un système de trois équations à quatre inconnues est constituée de cinq colonnes, celles des inconnues et celle des termes inhomogènes. Il est souvent compatible, par exemple dans le cas homogène.

☐ Faux. La matrice augmentée d'un système de quatre équations à trois inconnues est constituée de quatre lignes, une pour chaque équation, et quatre colonnes, celles des inconnues et celle des termes inhomogènes. Un pivot dans chaque colonne implique donc un pivot dans chaque ligne. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme $(0\ 0\ 0\ 3)$ par exemple pour que le système soit incompatible.