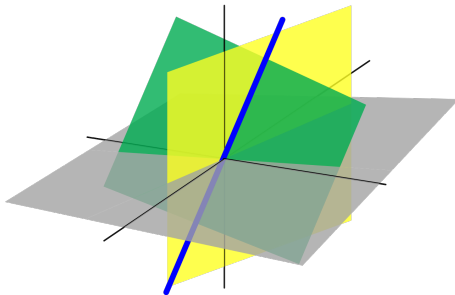


ALGÈBRE LINÉAIRE

APPLICATION: OPTIMISATION LINÉAIRE

Jérôme Scherer



UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

Voici un exemple trouvé sur Wikipedia, n'hésitez pas à consulter la page https://fr.wikipedia.org/wiki/Optimisation_linéaire pour plus de détails.

Une firme a le projet de construire deux produits P et Q nécessitant l'utilisation de 3 machines. Des restrictions sont imposées par les machines:

- ❶ La machine A ne peut travailler que 150 heures par mois,
- ❷ La machine B ne peut travailler que 210 heures, et
- ❸ la machine C ne peut travailler que 180 heures.

UN PROBLÈME D'OPTIMISATION, SUITE

Le temps de fabrication des produits est soumis aux contraintes suivantes:

- ❶ Le produit P nécessite 1 heure de la machine A et 1 heure de la machine B et il est vendu 300 euros à l'unité.
- ❷ Le second produit Q nécessite une heure de la machine A, trois heures de la machine B et 3 heures de la machine C et il est vendu 500 euros à l'unité.

Enfin, le terme d'optimisation vient du fait que la firme cherche à définir le programme de fabrication lui permettant d'optimiser son prix de revient.

LES INÉQUATIONS

Appelons x le nombre de produits P et y le nombre de produits Q que l'entreprise fabriquera en un mois. On a alors les inéquations suivantes pour les inconnues $x, y \geq 0$ (qui correspondent aux contraintes imposées par les machines A, B et C).

$$\begin{cases} x + y \leq 150 \\ x + 3y \leq 210 \\ 3y \leq 180 \end{cases}$$

On préfère avoir des équations que des inéquations. Comme $x + y \leq 150$, il existe un nombre $r \geq 0$ tel que $x + y + r = 150$. On procède de même pour les deux autres inéquations en introduisant des nombres s et t .

MODÉLISATION MATRICIELLE

La fonction à maximiser est le revenu $300x + 500y$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 150 \\ 210 \\ 180 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on cherche le(s) vecteur(s) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ pour lesquels

$AX = B$ et qui maximisent CX .

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Pour un problème de dimension petite (deux inconnues), on peut résoudre graphiquement (illustration wikipedia). Ce sera bien sûr impossible pour des problèmes plus complexes!

