

# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

### Automne 2022

---

## Enoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\mathbf{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $M_{m \times n}$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels.
- Pour  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire canonique est défini par  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .
- Pour  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , la norme euclidienne est définie par  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors une solution au sens des moindres carrés  $\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  de l'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  satisfait

☐  $\hat{x}_1 = \frac{6}{17}$ .      ☐  $\hat{x}_1 = \frac{12}{35}$ .      ☐  $\hat{x}_1 = -\frac{6}{17}$ .      ☐  $\hat{x}_1 = -\frac{12}{35}$ .

**Question 2 :** Soit  $R$  la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

☐  $r_{14} = -4$ .      ☐  $r_{14} = -3$ .      ☐  $r_{14} = -6$ .      ☐  $r_{14} = 0$ .

**Question 3 :** La droite de régression linéaire pour les points  $(-2, -1), (0, 1), (2, -2), (4, 1)$  est

☐  $y = \frac{2}{5} + \frac{3}{20}x$ .      ☐  $y = -\frac{2}{5} - \frac{3}{20}x$ .      ☐  $y = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}x$ .      ☐  $y = -\frac{2}{5} + \frac{3}{20}x$ .

**Question 4 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - 4z = a \\ x \quad \quad - z = 2 \end{cases}$$

possède des solutions si et seulement si

☐  $a = -\frac{2}{9}$ .      ☐  $a = \frac{2}{9}$ .      ☐  $a = -\frac{9}{2}$ .      ☐  $a = \frac{9}{2}$ .

**Question 5 :** Soient

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $P = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  la matrice de changement de base de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{C}$ , telle que  $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Alors la troisième colonne de  $P$  est

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .      ☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .      ☐  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .      ☐  $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

**Question 6 :** Soit  $t$  un paramètre réel. Les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

☐  $t \neq 5$ .

☐  $t = 5$ .

☐  $t \neq -5$ .

☐  $t = -5$ .

**Question 7 :** Soit  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow M_{2 \times 2}$  l'application linéaire définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_2.$$

Soient

$$\mathcal{B} = (1, t + t^2, t - t^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de  $\mathbb{P}_2$  et  $M_{2 \times 2}$  respectivement. La matrice  $A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  associée à  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{P}_2$  et la base  $\mathcal{C}$  de  $M_{2 \times 2}$ , telle que  $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $p \in \mathbb{P}_2$ , est

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

☐  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Question 8 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d + 2a & 3e + 6b & f + 2c \\ g & 3h & k \end{pmatrix}$$

deux matrices de taille  $3 \times 3$ . Si  $\det(A) = 1$ , alors on a

☐  $\det(B) = 1$ .

☐  $\det(B) = 2$ .

☐  $\det(B) = 3$ .

☐  $\det(B) = 6$ .

**Question 9 :** L'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est

☐  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ .

☐  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

☐  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

☐  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Question 10 :** L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sans changer l'ordre des colonnes fournit une base orthogonale de  $\text{Im}(A)$  donnée par les vecteurs

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

☐  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**Question 11 :** La projection orthogonale du vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  sur le sous-espace vectoriel engendré par la

première et la deuxième colonne de la matrice  $A$  de la Question 10 est le vecteur

☐  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

☐  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

☐  $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$

☐  $\begin{pmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}.$

**Question 12 :** La matrice  $A$  de la Question 10 possède une décomposition QR telle que

☐  $r_{23} = \frac{3}{\sqrt{6}}.$

☐  $r_{23} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$

☐  $r_{23} = -2.$

☐  $r_{23} = -\sqrt{6}.$

**Question 13 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Alors

☐ la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 4$  est égale à 2.

☐ la multiplicité de la valeur propre  $\lambda = 3$  est égale à 1.

☐ la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 3$  est égale à 2.

☐ la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = 4$  est égale à 1.

**Question 14 :** Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application linéaire définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Alors

☐  $T$  est injective mais pas surjective.

☐  $T$  est injective et surjective.

☐  $T$  n'est ni injective ni surjective.

☐  $T$  est surjective mais pas injective.

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 15 :** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  et soient  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . Si les vecteurs  $\mathbf{w}_1$  et  $\mathbf{w}_2$  sont linéairement indépendants, alors les vecteurs  $\text{proj}_V(\mathbf{w}_1)$  et  $\text{proj}_V(\mathbf{w}_2)$  sont linéairement indépendants.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 16 :** Soit  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  une famille orthogonale de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$  est tel que  $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  est une famille orthogonale, alors  $\mathbf{v}_0$  est orthogonal à  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 17 :** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$ , alors on a

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Im } A^T) + \dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Ker } A^T) = m + n.$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 18 :** Soient  $A$  et  $P$  deux matrices de taille  $n \times n$ . Si  $P^T A P$  est symétrique, alors  $A$  est symétrique.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 19 :** Soit  $W = \{A \in M_{2 \times 2} : A = A^T\}$ . Alors  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $M_{2 \times 2}$  de dimension 3.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 20 :** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ . Si  $R$  est la forme échelonnée réduite de  $A$ , alors

$$\det(A) = \det(R).$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 21 :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$ . Si  $A$  et  $B$  ont le même polynôme caractéristique, alors  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres et pour chaque valeur propre  $\lambda$  on a

$$\dim(\text{Ker}(A - \lambda I_n)) = \dim(\text{Ker}(B - \lambda I_n)).$$

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 22 :** Soient  $V$  et  $W$  des espaces vectoriels de dimension finie et soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Soit  $d$  la dimension de l'image de  $T$ . Alors  $d \leq \dim W$  et  $d \leq \dim V$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 23 :** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  dont les colonnes forment une base de  $\mathbb{R}^m$ , alors pour tout choix de  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , le système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  possède une solution unique.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 24 :** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{F} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  une famille de vecteurs de  $V$ . Si toute sous-famille de  $\mathcal{F}$  formée de  $n - 1$  éléments est linéairement indépendante, alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $V$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 25 :** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles de taille  $n \times n$ , alors  $(A + B)^2$  est inversible.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 26 :** L'ensemble  $\{p \in \mathbb{P}_n : p(-t) = -p(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 27 :** Si  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , alors la matrice

$$A = \mathbf{v} \mathbf{v}^T - \mathbf{w} \mathbf{w}^T$$

est diagonalisable.

☐ VRAI      ☐ FAUX

## Troisième partie, questions de type ouvert

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée: toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher: elles sont réservées au correcteur.

**Question 28:** *Cette question est notée sur 3 points.*

0  1  2  3

Réservé au correcteur

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  à coefficients réels telle que sa forme échelonnée réduite contient exactement  $k$  lignes nulles. Déterminer le rang de  $A$  et la dimension de  $\text{Ker}(A)$  en fonction de  $m$ ,  $n$  et  $k$ .

**Question 29 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

*Réservé au correcteur*

Soit  $A$  une matrice symétrique de taille  $n \times n$  à coefficients réels. Soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre de  $A$  et  $W = \text{Vect}\{\mathbf{v}\}$ . Montrer que si  $\mathbf{y} \in W^\perp$ , alors  $A\mathbf{y} \in W^\perp$ .



**Question 30 :** *Cette question est notée sur 3 points.*

\_0 \_1 \_2 \_3

*Réservé au correcteur*

Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  à coefficients réels et soit  $O$  la matrice nulle de taille  $n \times n$ .

Montrer que si  $A$  est diagonalisable et  $A^2 = O$ , alors  $A = O$ .

