

## Série 4

**Mots-clés:** calcul matriciel, produit de matrices, puissance d'une matrice carrée, transposée, inverse d'une matrice carrée, matrices élémentaires.

### Question 1

Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent).

Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a)  $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$

b)  $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

### Question 2

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de  $k \in \mathbb{R}$  a-t-on  $AB = BA$ ?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $MN = MT$ , bien que  $N$  soit différent de  $T$ .

**Question 3** Soit  $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ , et  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$ .

- a) Écrire les matrices canoniques associées à  $T_1$  et  $T_2$  et le produit matriciel associé à la composition  $T_2 \circ T_1$  telle que  $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ .
- b) Quel est le domaine de définition de  $T_2 \circ T_1$ ? Quel est le domaine d'arrivée?

**Question 4** Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces,  $T_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\cdots}} \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\cdots}} \mathbb{R}^{\cdots}$ .

- a)  $AB$ , où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .
- b)  $ABC$ , où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .
- c)  $ABC$ , où  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Question 5

- a) Dans le plan, soit  $S$  la symétrie axiale d'axe  $x = -y$ . Décrire son inverse s'il existe. Quelles sont les matrices de ces applications?
- b) Même question pour  $H$  l'homothétie de rapport 3.
- c) Même question pour  $R_\theta$  la rotation d'angle  $\theta$  centrée en l'origine.

**Question 6**

a) Déterminer les matrices élémentaires  $3 \times 3$  suivantes :

- $E_1$ , qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes;
- $E_2$ , qui multiplie la deuxième ligne par 8;
- $E_3$ , qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.

b) Les matrices  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont-elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit  $E_1 E_2 E_3$ .

c) A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices suivantes se rapporte-t-elle ?

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Question 7** On considère les matrices élémentaires de taille  $4 \times 4$ .

- Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a, b et c.

**Question 8**

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Question 9**

a) Est-ce que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est inversible? Si oui calculer son inverse.

b) Trouver les solutions du système homogène  $Ax = 0$ .

c) Trouver les solutions du système  $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Question 10** Pour quelles valeurs des paramètres  $a, b, c$  la matrice  $A$  ci-dessous est-elle inversible?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'inverse de  $A$  lorsque cela est possible.

**Question 11** Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices. Alors  $(AB)C = (AC)B$ .

☐ Faux

☐ Vrai

b) Si  $A$  est une matrice inversible, alors  $A^{-1}$  l'est aussi.

☐ Faux

☐ Vrai

c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille  $n \times n$  n'est pas inversible.

☐ Faux

☐ Vrai

d) Si  $A$  est une matrice inversible de taille  $n \times n$ , alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est compatible quel que soit  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ .

☐ Faux

☐ Vrai

e) Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , alors  $A$  est inversible si et seulement si  $A^k$  est inversible.

☐ Faux

☐ Vrai

**Question 12**

a) Les matrices sont de taille  $n \times n$ .

- ☐ Soient  $A, B$  deux matrices telles que  $A$  ou  $B$  n'est pas inversible. Alors  $AB$  n'est pas inversible.
- ☐ Soient  $A, B$  deux matrices inversibles, alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .
- ☐ Il existe une matrice  $A$  inversible et une matrice  $B$  qui ne l'est pas telles que  $AB$  est inversible.
- ☐ Soient  $A, B$  deux matrices inversibles, alors  $A + B$  est inversible.

b) Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $n \times p$ .

- ☐ Si  $A$  est inversible alors  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .
- ☐ Si  $m = n = p$ ,  $A = A^T$  et  $B = B^T$ , alors  $(AB)^T = AB$ .
- ☐ Si  $m = n$  et  $A = A^T$ , alors  $A$  est diagonale.
- ☐ Alors  $(AB)^T = A^T B^T$ .

c) Soient  $A, B, C$  trois matrices  $n \times n$ .

- ☐ Si  $C$  est inversible et  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
- ☐ Si  $C = C^T$  et  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
- ☐ Si  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .
- ☐ Si  $A$  est inversible et  $AC = BC$ , alors  $A = B$ .