

Série 3

Mots-clés: indépendance linéaire, familles de vecteurs linéairement (in)dépendantes, transformations matricielles, applications linéaires, matrice d'une application linéaire, surjectivité, injectivité, bijectivité.

Question 1 Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$

Question 2 Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ Le vecteur $\vec{v}_3$ dépend linéairement des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ pour $h = 2$.
- ☐ Pour tout $h \in \mathbb{R}$, le vecteur $\vec{v}_2$ dépend linéairement des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_3$.
- ☐ L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- ☐ L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.

Question 3 Soit $h \in \mathbb{R}$ et considérons les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $\vec{v}_3$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ lorsque

☐ $h = -2$

☐ $h = 1$

☐ $h = 2$

☐ $h = 4$

Question 4 Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

☐ $b = 2$

☐ $b = 3$

☐ $b = 4$

☐ $b = 1$

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$.
- b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$.
- c) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
- d) Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.
- e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

Question 6 Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes, définies par les images des vecteurs de la base canonique:

- a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
- b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
- c) $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60° (dans le sens trigonométrique).

Question 7 L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - 5y + 7z, 3x - y - 2z, y + 3z)$$

☐ est surjective mais pas injective

☐ n'est ni surjective ni injective

☐ est injective mais pas surjective

☐ est bijective

Question 8 Dire si les applications ci-dessous sont linéaires. Calculer la matrice associée canoniquement à chacune des applications qui sont linéaires et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Question 9 Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

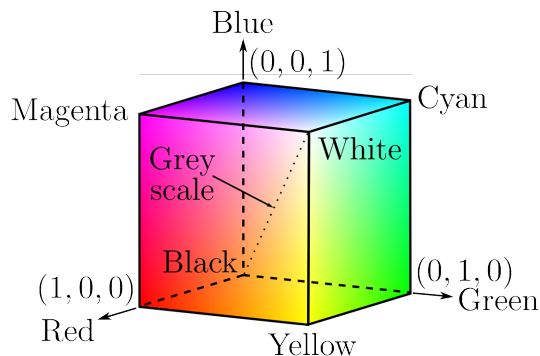
b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Question 10 Considérons $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^3$, le cube de couleurs RGB^a comme ci-dessous, avec $R = \text{Red}$, $G = \text{Green}$ et $B = \text{Blue}$.



- Écrire les couleurs $C = \text{Cyan}$, $Y = \text{Yellow}$ et $M = \text{Magenta}$ comme combinaisons linéaires de R , G et B .
- Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire qui transforme rouge en cyan, vert en magenta et bleu en jaune. Écrire la matrice canoniquement associée à T .
- Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie^b par $f(r, g, b) = (1 - r, 1 - g, 1 - b)$.
 - Est-ce que $T(R) = f(R)$? Et $T(G) = f(G)$? Et $T(B) = f(B)$?
 - Est-ce que les fonctions T et f sont égales?

^aC'est l'ensemble $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$; chaque point est un triplet (r, g, b) où $0 \leq r, g, b \leq 1$.

^bLa fonction n'était bien définie dans la première version de la série.