Exercices — Série 14

Mots-clés: décomposition en valeur singulières, chaînes de Markov discrètes.

Question 1
Pour les matrices ci-dessous déterminer

$$\max\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\} \text{ et } \min\{\|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Question 2 Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 3 Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Question 4 Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si A est une matrice de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A, alors $A = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) Si A est une matrice symétrique de taille $n \times n$ telle que 0 est l'unique valeur propre de A, alors $A = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

c) La matrice d'une forme quadratique est symétrique.

☐ VRAI ☐ FAUX

d) Une forme quadratique définie positive satisfait $Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

e) Si les valeurs propres d'une matrice symétrique A sont toutes strictement positives, alors la forme quadratique $x^T Ax$ est définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

f) Si les coefficients de A (symétrique) sont tous ≥ 0 alors $q(x) = x^T Ax$ est définie positive.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 6 Considérons une matrice $P = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont des nombres compris entre 0 et 1.

a) Est-ce que P est une matrice de transition?

b) Trouver les valeurs propres de P en fonction de p et q.

c) Expliquer pourquoi P est diagonalisable (pour tous choix de p et q)

d) Diagonaliser P en fonction de p et q.

e) Donner des conditions sur p et q pour l'existence de $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} P^k$.

f) Calculer $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} P^k$ lorsque cette limite existe.

Question 7 On considère la population d'une région, divisée en population rurale et population urbaine. On note $R(n)$ et $U(n)$ les populations rurales et urbaines à l'année n. On notera par a le taux d'exode rural annuel et par b le taux d'exode urbain (que l'on supposera constants).

(a) Écrivez des équations qui expriment $R(n+1)$ et $U(n+1)$ en fonction de $R(n), U(n), a$ et b.

(b) Écrivez ces équations en une seule équation matricielle.

(c) Prenons les valeurs $a = 0.2$ et $b = 0.1$, ainsi que $R(0) = 100000 = U(0)$. Calculez la population rurale et urbaine à la troisième année.

(d) Donnez une formule qui permet de calculer $R(n)$ et $U(n)$ pour tout entier n.

Question 8
Après une étude sur 100 ans sur la succession de jours *pluvieux* et *secs* dans une ville on a récolté les statistiques suivantes:

- Si un jour est sec on a 75% de chances que le jour d'après soit sec aussi.
- Si un jour est pluvieux on a 66,2% de chances que le jour suivant soit pluvieux également.

a) Décrire la situation en proposant un modèle de Markov et sa matrice de transition.

b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, calculer la probabilité qu'il pleuve dans 1,2,3 et 10 jours.

c) Est-ce que la probabilité qu'il fasse beau dans k jours tend vers une certaine valeur lorsque k tend vers l'infini? Si oui calculer cette valeur.

Indication: On pourra s'aider des résultats de l'exercice 6.

Question 9 [Exercice facultatif (plus difficile)]
Deux chiens[a] se partagent n puces. À chaque instant une des n puces au hasard saute d'un chien à l'autre. Choisissons de regarder un seul des deux chiens et de compter le nombre de puces qu'il a sur le dos. On notera E_i l'état dans lequel le chien en question a exactement i puces sur son dos.

a) Exprimer les probabilités de transition $p_{i,i+1}$ et $p_{i,i-1}$ pour tout i.

b) Quelles sont les autres probabilités de transition?

c) Écrire la matrice de transition pour $n = 4$.

d) Trouver un vecteur stationnaire pour la matrice de transition.

e) Généraliser les deux points ci-dessus à tout n.

[a] Cet exemple est tiré de l'article *Chaîne de Markov* sur Wikipedia. Une version plus sérieuse de ce modèle – avec des boules et des urnes – a été proposée pour la première fois par Paul et Tatjana Ehrenfest in *Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem.* Physikalische Zeitschrift, vol. 8 (1907), pp. 311 –314.

♣ Toute l'équipe vous souhaite une bonne nouvelle année ♣
et tous nos vœux de réussite pour les examens!