Exercices — Série 10

Mots-clés: valeurs et vecteurs propres, espaces propres, diagonalisation.

Question 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les valeurs propres de A.
2) Calculer les vecteurs propres de A.
3) Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres *différentes*). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.
4) (Optionnel) Calculer A^{1000}.

Question 2
Déterminer lesquelles, parmi les matrices suivantes, sont diagonalisables:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Question 3

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.
b) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Question 4 Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes.

☐ VRAI ☐ FAUX

b) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

☐ VRAI ☐ FAUX

c) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

d) Si 0 est valeur propre, alors $\operatorname{rg}(A) < n$.

☐ VRAI ☐ FAUX

e) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 5
On considère la transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x, y) = (10x + 12y, -8x - 10y)$$

1) Donner la matrice A canoniquement associée à T (c'est-à -dire selon la base canoniques de $\mathbb{R}^2$).

2) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A.

3) Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A.

4) (Optionnel) Calculer A^{15}.

Question 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trouver le polynôme caractéristique de A.

b) Trouver les valeurs propres et les espaces propres de A

c) Montrer que A est diagonalisable.

d) Donner une formule pour A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.