Durée : 60 minutes

Algèbre linéaire
Test intermédiaire
MT
Automne 2024

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\boldsymbol{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = P_{\mathcal{CB}}$ la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}} = P[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Question 2 : Soit $\mathcal{B} = \left(2-t,\ t+t^2,\ -1+t^3,\ -1-t+2t^2\right)$ une base ordonnée de $\mathbb{P}_3$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

☐ -7.
☐ $\frac{1}{7}$.
■ $-\frac{1}{7}$.
☐ 3.

Question 3 : Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-y \\ -5x+6y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Alors

■ T est injective mais pas surjective.
☐ T est surjective mais pas injective.
☐ T est injective et surjective.
☐ T n'est ni injective ni surjective.

Question 4 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\det(A) = 0$.
☐ $\det(A) = 12\pi$.
■ $\det(A) = -6\pi$.
☐ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$.

Question 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

■ $b_{33} = \frac{4}{39}$. □ $b_{41} = \frac{1}{3}$. □ $b_{33} = -\frac{1}{13}$. □ $b_{43} = \frac{2}{3}$.

Question 6 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $2{\times}2$ et soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to W$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a & b-c \\ b-c & a+b+c \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \big(1,\, 1-t,\, t+t^2\big) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

des bases ordonnées de $\mathbb{P}_2$ et W respectivement. La matrice $A = [T]_{\mathcal{CB}}$ associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de W, telle que $\big[T(p)\big]_{\mathcal{C}} = A\big[p\big]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

□ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 7 : Soient U, V et W des espaces vectoriels. Soient $T\colon U \to V$ et $S\colon V \to W$ deux applications (pas forcément linéaires) et $S \circ T\colon U \to W$ l'application composée. Alors

□ si $S \circ T$ est l'application nulle, alors S et T sont nulles.

■ si S et T sont linéaires, alors $S \circ T$ est linéaire.

□ si $S \circ T$ est l'application nulle, alors S ou T est nulle.

□ si $S \circ T$ est linéaire, alors T et S sont linéaires.

Question 8 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

□ $x_1 = 3$. ■ $x_1 = -3$. □ $x_1 = -2$. □ $x_1 = 2$.

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$ telles que $A + B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A + B$ est aussi inversible.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 10 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 11 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5 = 0$, alors T est surjective.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 12 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T \colon V \to W$ une application linéaire. Si $\dim(\operatorname{Ker} T) = \dim V$, alors $\operatorname{Im} T = \{\mathbf{0}_W\}$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 \mid q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 14 : Soit $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 15 : Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A - A^T) = \det(A) - \det(A^T).$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 16 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5$ engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5$.

■ VRAI ☐ FAUX